Computergestützte Mathematik zur Analysis – 11. Übungsblatt

Aufgabe 41:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = -(x^3 + 3x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

(a) Plotten Sie die Graphen von f, f' und f'' zusammen mit einer Legende gut sichtbar über dem Intervall $[-2, 6]$ in verschiedenen Farben.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen von f und stellen Sie fest, welche von ihnen Maximal- bzw. Minimalstellen sind.

(c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ und plotten Sie den Graphen und die Tangente in eine Grafik. Bestimmen Sie ferner numerisch alle Schnittpunkte der Tangente mit f.

Aufgabe 42:

(a) Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `mygradient(f,var)`, die den Gradienten einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnet, wobei `var` ein Tupel ist, das die n Variablen enthält, nach denen dabei abgeleitet wird. Das Resultat soll als Vektor (also vom Typ `Matrix`) zurückgegeben werden.

(b) Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `myhesse(f,var)`, die die Hessematrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnet, wobei `var` ein Tupel ist, das die Variablen enthält, nach denen abgeleitet wird. Das Resultat soll als Matrix (also vom Typ `Matrix`) zurückgegeben werden.

(c) Testen Sie Ihre Funktionen für $f(x, y, z) = x^2 + \sin(y)z + 3x\mathrm{e}^{-z}$.

Wichtig: Verwenden Sie nicht die in `sympy` implementierten Funktionen `jacobian` und `hessian`.

Aufgabe 43:

Betrachten Sie die Matrix ähnlich Aufgabe 38 Teil c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie mithilfe der Determinante das charakteristische Polynom und ermitteln Sie daraus die Eigenwerte.

(b) Berechnen Sie außerdem die zugehörigen Eigenvektoren indem Sie jeweils für die Eigenwerte λ den Kern von $\lambda I - A$ bestimmen.

(c) Bestimmen Sie die euklidische Norm $\|v\|_2 = \sqrt{v^H v}$ der erhaltenen Eigenvektoren.

Hinweis: Hier sollen Sie nicht die in sympy vorhandenen Methoden `eigenvects` oder `eigenvals` verwenden.

bitte wenden

Aufgabe 44:

(a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ auf der z-Achse, d.h. der durch $(0,0,1)$ aufgespannte Achse, liegt, wenn $x_3 = y_3 = 0$ gilt. ($\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$)

(b) Für welche Werte a hat das von den Vektoren $u = (1,2)^T$ und $v = (3,a)^T$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 5? Verwenden Sie zur Lösung dieser Aufgabe das Kreuzprodukt.

Besprechung in den Übungen vom 14.-16. Januar 2026.