Computergestützte Mathematik zur Analysis – 10. Übungsblatt

Aufgabe 37:

Lösen Sie die beiden nichtlinearen Gleichungssysteme für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge und überprüfen Sie Ihre Lösungen.

(a)

$$\begin{aligned} \frac{7x_1}{x_1 - x_2} + 3x_1 + 3x_2 &= 75 \\ \frac{9x_1}{x_1 - x_2} - 4x_1 - 4x_2 &= 10 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 + 4} &= x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 38:

Erzeugen Sie die folgenden Matrizen mit Hilfe von `sympy`, **ohne** jeden Eintrag einzeln einzugeben. Verwenden Sie geeignete Bildungsvorschriften. Benutzen Sie `Matrix(...)` pro Teilaufgabe nur einmal.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 16 & 25 & 36 & 49 & 64 \\ 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 24 & 19 & 14 & 9 & 4 \\ 23 & 18 & 13 & 8 & 3 \\ 22 & 17 & 12 & 7 & 2 \\ 21 & 16 & 11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 39:

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Ränge von A und $[A \mid b]$ und machen Sie eine Aussage über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ und geben Sie die Lösung als Vektor an. Überprüfen Sie, ob dieser Vektor das System tatsächlich löst.

(c) Geben Sie zwei konkrete Lösungen des Systems an.

bitte wenden

Aufgabe 40:

Es sei die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie $M \cdot M^T$ und $M^T \cdot M$ und bestimmen Sie jeweils die Determinante.

(b) Sei U diejenige Matrix, die aus $M \cdot M^T$ entsteht, wenn man die äußeren Zeilen und Spalten streicht, d. h. U ist der innere 2×2 Block von $M \cdot M^T$. Berechnen Sie $U^2 \cdot (M^T \cdot M)^{-1}$.

(c) Sei $V := M \cdot M^T + D$, wobei D die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $[0, 1+2t, 1-3t, 0]$ ist. Bestimmen Sie, für welche Werte von t die Determinante von V verschwindet. Wie hätte man einfach auch ganz ohne sympy darauf kommen können? 😸

Besprechung in den Übungen vom 07.-09. Januar 2026.