Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. MARINA FISCHER

05.12.2022

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 33:

(a) Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren. Lösen Sie dabei das nichtlineare Gleichungssystem mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

(b) Wenden Sie sowohl das explizite als auch das implizite Eulerverfahren auf das Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = -2r(t) + r(t)b(t) \\ \dot{b}(t) = b(t) - r(t)b(t) \end{cases}$$

mit Startwerten $r(0) = 1$ und $b(0) = 1.5$ an. Verwenden Sie dazu eine relativ große Schrittweite und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

Aufgabe 34:

Bestimmen Sie die Stabilitätsbereiche

(a) der expliziten Mittelpunktsregel $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n$, sowie

(b) der Trapezregel $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f_{n+1} + f_n\right)$

und skizzieren Sie beide in der komplexen Ebene.

Aufgabe 35:

Zeigen Sie, dass alle irreduziblen Zweischrittverfahren der Ordnung 2 durch

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\alpha(\zeta - 1) + 1), \qquad \sigma(\zeta) = (\zeta - 1)^2\beta + (\zeta - 1)\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) + 1$$

mit geeigneten Koeffizienten α, β, wobei $\alpha \neq 2\beta$, gegeben sind.

Hinweis: Für Verfahren mit Ordnung 2 gilt $\rho(e^h) - h\sigma(e^h) = \mathcal{O}(h^3)$ für $h \to 0$ (Taylor-Entwicklung von e^h).
Bei Mehrschrittverfahren kommt es nicht auf die Skalierung der Polynome an, obige sind nicht wie in der Vorlesung skaliert.

Zur Definition: Ein Verfahren ist irreduzibel, wenn $\mathrm{ggT}(\sigma, \rho) = 1$, d.h. wenn σ und ρ keine gemeinsamen Wurzeln besitzen. Diese Definition gilt sowohl für explizite als auch implizite Verfahren.

Aufgabe 36:

Gegeben sei die lineare Differenzengleichung

$$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 y_n = 0. \tag{$*$}$$

$\zeta_1, \ldots, \zeta_\ell$ seien die paarweise verschiedenen Nullstellen des erzeugenden Polynoms $\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j$ mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_\ell$.

Zeigen Sie:

(a) Im Spezialfall $m_i = 1$ für $i = 1, \ldots, \ell = k$ bilden die Folgen

$$\left\{\zeta_j^n\right\}_{n \geq 0}, \qquad 1 \leq j \leq k$$

ein System von k linear unabhängigen Lösungen von $(*)$.

Zusatzaufgabe (freiwillig): Falls Sie noch Lust haben, so können Sie auch den allgemeinen Fall $m_i \geq 1$ zeigen:

Für $1 \leq j \leq \ell$ und $0 \leq i \leq m_j - 1$ bilden die Folgen

$$\left\{\binom{n}{i} \zeta_j^{n-i}\right\}_{n \geq 0}$$

ein System von k linear unabhängigen Lösungen von $(*)$.

(b) Die Lösung von $(*)$ ist für jede Wahl von Startwerten $y_0, \ldots, y_{k-1}$ genau dann beschränkt, wenn

$$|\zeta_j| \leq 1 \text{ für } j = 1, \ldots, \ell \quad \text{ und } \quad m_j = 1, \text{ falls } |\zeta_j| = 1.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus der Zusatzaufgabe.
Bemerkung: Dies beweist die Dahlquist'sche Wurzelbedingung (Satz (4.14) aus der Vorlesung).

Besprechung in der Übung am Montag, 12.12.2022.