Aufgabe 18

Definiere $\gamma_{ax}(t) = a + t(x-a)$ für $t \in [0,1]$, sodass $\gamma_{ax} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ diff.bar auf $[0,1]$ mit $\gamma_{ax}'(t) = x-a$.

Nach Voraussetzung ist $\gamma_{ax}(t) \in \overline{ax} \subseteq U$ für alle $t \in [0,1]$.

Ferner ist $f : U \to \mathbb{R}^k$ einmal stetig diffbar und

$\gamma_{ax} : [0,1] \to U$ ist diff.bar

Kettenregel liefert: $F = f \circ \gamma_{ax} : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ diff.bar mit

$$F'(t) = f'(\gamma_{ax}(t)) \cdot \gamma_{ax}'(t) = f'(\gamma_{ax}(t)) \cdot (x-a)$$

für alle $t \in [0,1]$.

Da f' stetig auf U und γ_{ax} stetig auf $[0,1]$, ist

auch $f'(\gamma_{ax}(t))$ stetig auf $[0,1]$.

Folglich ist auch F' stetig auf $[0,1]$ bzw. $F : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ stetig diff.bar.

Hauptsatz der Integralrechnung liefert wegen

$$F(1) = f(\gamma_{ax}(1)) = f(x), \quad F(0) = f(\gamma_{ax}(0)) = f(a)$$

$$f(x) - f(a) = F(1) - F(0) \overset{\text{HDI}}{=} \int_0^1 F'(t)\,dt = \int_0^1 f'(\gamma_{ax}(t)) \cdot (x-a)\,dt.$$