MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

17.01.2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

48	49	50	51	52	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

GRUPPE: ____________________

Numerik II – 12. Übungsblatt

Aufgabe 48:

(a) Sei $x \in \mathbb{C}^N$. Stellen Sie für $a = (-2, 1, 0, 0, 1, 3, 2, -1)$ und $b = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ das zu $a * x = b$ gehörige lineare Gleichungssystem auf.

(b) Geben Sie ein Verfahren (Pseudocode) an, um für gegebenes $a \in \mathbb{C}^N$, mit $N = 2^L$, die exakten Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $x \mapsto a * x$ zu bestimmen.

Aufgabe 49:

Zeigen Sie für gerades $N \in \mathbb{N}$:

(a) Für $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ periodisch fortgesetzt gilt: $\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine periodisch fortgesetzte gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade.

Hinweis: Eine gerade Folge hat für gerades N die Form $[x_0 \; x_1 \; \cdots x_{N/2-1} \mid x_{N/2} \; \cdots x_2 \; x_1]$.

Aufgabe 50:

Es sei $f \in L^2(0, 2\pi)$ eine 2π-periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten α_k. Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten von $f(\cdot - s)$ für festes $s \in \mathbb{R}$ durch $\beta_k = e^{-iks}\alpha_k$ gegeben sind.

Aufgabe 51:

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$ der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = 11\sin(3x) - 5\cos(27x) + e^{-2ix}.$$

(b) Berechnen Sie die diskreten Fourierkoeffizienten (Approximation durch Trapezregel) $\hat{f}_N(k)$ für alle N und $0 \leq k \leq N-1$ (für f wie in (a)). Ab welchem N sind alle diskreten Fourierkoeffizienten identisch mit den exakten Fourierkoeffizienten?

Aufgabe 52:

(a) Schreiben Sie einen Algorithmus, der die ersten $N+1$ Koeffizienten der Potenzreihe einer im Einheitskreis analytischen Funktion f, d.h. $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(f)\zeta^n$, berechnet.
Betrachten Sie hierfür die Darstellung der Koeffizienten $w_n(f)$ mit Hilfe der Cauchy-Integralformel, wobei über den Rand des Ursprungskreises mit Radius $\rho = \sqrt{\varepsilon}^{1/N}$, $\varepsilon > 0$ integriert wird, das heißt

$$w_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{1}{\zeta^{n+1}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta \quad \text{für } n = 0, \dots, N.$$

Approximieren Sie das Integral unter Verwendung der Trapezregel mit äquidistanter Schrittweite mit $L = 2^{\mathrm{ceil}(\log_2(\mathrm{N}))}$ Schritten und werten Sie die Approximation mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation aus.

(b) Schreiben Sie eine Funktion, die den Algorithmus aus (a) verwendet, um die Koeffizienten der Potenzreihe eines Produkts fg zu bestimmen. Wenden Sie hierfür den Algorithmus sowohl auf die Funktion f als auch auf g an und überlegen Sie sich, wie Sie die Koeffizienten $w_n(fg)$, $n = 0, \dots, N$ aus den Koeffizienten $w_n(f)$, $n = 0, \dots, N$ und $w_n(g)$, $n = 0, \dots, N$ erhalten.

(c) Testen Sie Ihre Funktion aus (b) mit $f(\zeta) = \sqrt{\frac{1+\zeta}{2(1-\zeta)}}$ und $g(\zeta) = e^{-\zeta}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat, wenn Sie direkt den Algorithmus aus (a) auf das Produkt fg anwenden.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 24.01.2018 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Mittwoch, 24.01.2018, 16:00 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.