Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

02. November 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

9	10	11	12	Σ

Name: _____

Mat-nr.: _____

Gruppe: _____

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator auf $C^2(\mathbb{R}^n)$ rotationsinvariant ist.

Aufgabe 10: (Diskretes Vergleichsprinzip)

Beweisen Sie Korrolar 3.3 aus der Vorlesung.

Aufgabe 11:

(a) Zeigen Sie, dass die lokale Approximation des Laplace-Operators in zwei Raumdimensionen durch den 5-Punkte-Stern die Konsistenzordnung 2 hat, d.h.

$$\partial_{xx}u(x,y) + \partial_{yy}u(x,y) = \frac{-4u(x,y) + u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

(b) Zeigen Sie, dass das kompakte Finite-Differenzen-Verfahren zur Approximation von $\partial_{xx}u(x)$

$$u(x-h) - 2u(x) + u(x+h) \approx \frac{h^2}{12}\partial_{xx}u(x-h) + \frac{5h^2}{6}\partial_{xx}u(x) + \frac{h^2}{12}\partial_{xx}u(x+h)$$

die Konsistenzordnung 4 hat.

Aufgabe 12: Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} u''(x) + q(x)u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega = (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Implementieren Sie eine Funktion `u=fd02(f,q,N,a,b)`, die mittels einer zentralen Finiten Differenzen Approximation der zweiten Ableitung eine approximative Lösung `u` von Gleichung (1) auf einem äuqidistanten Gitter mit `N` Gitterpunkten berechnet.

(b) Implementieren Sie eine Funktion `u=fd04(f,q,N,a,b)` die mittels des kompakten Finiten Differenzen Verfahrens aus Aufgabe 11(b) eine approximative Lösung `u` von (1) auf einem äuqidistanten Gitter mit `N` Gitterpunkten berechnet.

Hierbei sind `f` und `q` jeweils "function handles", zur Auswertung von f und q und `a` und `b` die Randpunkte des Gebiets Ω.

(c) Testen Sie Ihre Funktionen jeweils an dem Beispiel

$$\begin{cases} u''(x) + (1+4x^2)u(x) = -2\sin(x^2)\,(2\cos(x)x + \sin(x)) & \forall x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

dessen exakte Lösung durch $u(x) = \sin(x)\cos(x^2)$ gegeben ist und vergewissern Sie sich, dass Sie die in Aufgabe 11 berechneten Konsistenzordnungen erhalten.

Hinweis: Abgabe der Programmieraufgabe bitte bis zum 09.11., 8:30 Uhr an *Rebekka.Hausmann@uni-duesseldorf.de*.

Abgabe in der Vorlesung am Mittwoch, 9. November 2016 in der Vorlesung