MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

4.2.2016

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 14. Übungsblatt

Aufgabe 55:

Berechnen Sie $\exp(xA)$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösen Sie damit die die homogene Differentialgleichung

$$y' = Ay, \quad y(0) = (1,1,1,1)^T$$

und die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = Ay + (\sin(x), 0, x, 0)^T, \quad y(0) = (1,1,1,1)^T .$$

Aufgabe 56:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine hinreichend glatte Abbildung.

Zeigen Sie mit Maple, dass durch

$$y(x) = \mathrm{e}^{xA} y_0 + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-s)A} f(s, y(s))\, ds$$

eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + f(x,y), \quad y(0) = y_0$$

definiert wird.

(b.w.)

Aufgabe 57:

Ein einfaches Räuber-Beute-Modell wird gegeben durch

$$y' = ay - byz, \tag{1}$$
$$z' = -cz + dyz. \tag{2}$$

Dabei stellt man sich y als die Zahl der Beutetiere (Hasen) und z als die Zahl der Beutegreifer (sagen wir der Einfachheit halber Füchse) vor, beide als Funktionen der Zeit t. a, b, c und d seien positiv. Die Gleichungen sind so eingerichtet, dass sich die Hasen ohne Füchse beliebig vermehren, während die Füchse ohne Hasen aussterben.

(a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem für

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{1}{500}, \quad c = \frac{1}{10}, \quad d = \frac{1}{100000}$$

und die Anfangsbedingung $y(0) = 6000$, $z(0) = 30$ numerisch. Zeichnen Sie y und $100z$ in einem Bild über einem ausreichend langen Zeitintervall. Zeichnen Sie die ebene Kurve $\{(y(t), z(t)) \mid 0 \leq t \leq T\}$ für einen ausreichend großen Wert von T.

(b) Bestimmen Sie die konstanten Lösungen des Systems aus den Differentialgleichungen (1) und (2), also diejenigen Anfangsbedingungen, deren Lösung konstant ist.

(c) Zeichnen Sie das Vektorfeld der rechten Seite im Phasenraum (y, z)-Ebene.

Aufgabe 58:

Fortsetzung zu Aufgabe 57

(a) Wir ändern die erste der beiden Differentialgleichungen aus Aufgabe 57 wie folgt ab:

$$y' = ay - ky^2 - byz \tag{3}$$

und lassen die zweite unverändert. Zeigen Sie, dass nun die Zahl der Hasen nicht mehr unbeschränkt wächst, wenn es keine Füchse gibt.

Hinweis: Diesen Aufgabenteil lösen Sie bitte symbolisch.

(b) Lösen Sie nun für $k = 1/100000$ und $k = 1/1000000$ die Anfangswertaufgabe aus Aufgabe 57 für das Differentialgleichungssytem aus Gleichung (2) und (3) numerisch. Stellen Sie dieselben Zeichnungen wie in Aufgabe 57 (a) her, aber mit entsprechend längeren Zeitintervallen.

(c) Bestimmen Sie die konstanten Lösungen des neuen Systems in Abhängigkeit von k. Für welche k ist das Modell offensichtlich sinnlos?

Aufgabe 59:

Berechnen Sie für die Funktion aus Aufgabe 54
$\max\{f(x,y) \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\}$ sowie $\min\{f(x,y) \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\}$, ohne die Befehle `minimize` und `maximize` zu verwenden.

Besprechung in den Übungen vom 8.-11. Februar 2016.