

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 13. Übungsblatt

Aufgabe 50:

Lösen Sie die implizite Anfangswertaufgabe

$$(x^2y + y^3)y' + x^3 + xy^2 = 0, \quad y(1) = y_1$$

für $y_1 = 1$ und $y_1 = 0$. Zeichnen Sie sämtliche Lösungen der Anfangswertaufgabe mit $y_1 = 0$ in einem Plot. Bestimmen Sie dazu zuerst den Definitionsbereich dieser Lösungen.

Sind die Lösungen der Anfangswertaufgabe mit $y(1) = 0$ im Punkt 1 differenzierbar?

Aufgabe 51:

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x} - x^2 - x^3 + x^4 = 0.$$

Lösen Sie die Anfangswertaufgaben $y(1) = 1, 0, -1$.

Zeichnen Sie alle drei Lösungen über dem Intervall $[-1.5, 2.5]$. Warum ist das, was Sie sehen, kein Widerspruch zur Theorie?

Aufgabe 52:

Versuchen Sie, die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{xy}, \quad y(1) = 4,$$

mit Maple zu lösen. Diese Differentialgleichung ist eine Bernoullische Differentialgleichung, d. h. von der Form

$$y' + a(x)y + b(x)y^s = 0$$

für ein $s \neq 1$. Die positiven Lösungen einer solchen Bernoullischen Differentialgleichung haben die Form $f^{1/(1-s)}$, wobei f eine Lösung der assoziierten Differentialgleichung

$$w' + (1-s)a(x)w + (1-s)b(x) = 0$$

ist.

Lösen Sie die korrespondierende Anfangswertaufgabe für die assoziierte Differentialgleichung. Überprüfen Sie, dass Sie auf diese Weise tatsächlich eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung gefunden haben.

Aufgabe 53:

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben

$$y' + y \cdot \sin(x) + \sin(2x) = 0, \quad y(0) = 2, 1, 0.$$

Plotten Sie die Lösungen und das zugehörige Richtungsfeld in einer Zeichnung über $[-\pi, 2\pi] \times [4, 11]$.

Aufgabe 54:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := x^2 \cdot (y + 1) + \frac{y}{2}.$$

- (a) Zeichnen Sie die Funktion f .
- (b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Auf dem letzten Blatt wird es noch einmal fünf Aufgaben geben. Zur Zulassung für die Klausur sind 24 Punkte hinreichend. Sie können in den Übungsgruppen ihren aktuellen Punktestand einsehen.

Zur Klausur dürfen Sie ein doppelseitig beschriebenes Din-A4 Blatt mitnehmen. Außer Stiften benötigen Sie keine weiteren Schreibmaterialien. Papier wird von uns gestellt.

In der Klausur haben Sie Zugriff auf die Lektionen der Vorlesung, wie sie unter „Begleitmaterial“ auf der Vorlesungshomepage zur Verfügung stehen. Sie haben weder Zugriff auf die Übungsblätter, noch auf deren Musterlösungen.