MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

14.1.2016

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 11. Übungsblatt

Aufgabe 42:

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x^2 - y^2 + z^2 - (x^2 + 2y^2 + 4z^2)^2 .$$

Es stellt sich heraus, dass alle interessanten Punkte in der Ebene $\{y = 0\}$ liegen.
Zeichnen Sie den Graph von f über dem Rechteck $[-1, 1] \times [-1/2, 1/2]$ in der $(x, 0, z)$-Ebene.

Die folgenden Optionen sind dabei nützlich: `style=patchcontour, contours=35, view = -0.3 .. 0.3, numpoints=3000`. Auf diesem Bild sieht man zwei der drei Sattelpunkte sehr gut. Warum sieht man den dritten nicht? Erstellen Sie ein ähnliches Bild, welches den dritten Sattelpunkt zeigt.

Aufgabe 43:

Sei $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $||q||_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die euklidische Norm und seien $q_1 = (1, 0, 0)$ und $q_2 = (0, 1, 0)$. Stellen Sie das Gradientenvektorfeld der Funktion

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ : \ q \mapsto \frac{3}{||q_1 - q||_2} + \frac{2}{||q_2 - q||_2}$$

graphisch dar.

Aufgabe 44:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := -(x^3 + 3x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

(a) Plotten Sie die Graphen von f, f' und f'' über dem Intervall $[-2, 6]$ in festgelegten Farben.

(b) Berechnen Sie $\max\{f(x) : x \in [-1, 2]\}$ sowie $\min\{f(x) : x \in [-1, 2]\}$.

(c) Bestimmen Sie alle relativen Extremalstellen von f und stellen Sie fest, welche von ihnen Maximal- bzw. Minimalstellen sind.

(d) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0, f(0))$ und plotten Sie den Graphen und die Tangente in eine Graphik. Bestimmen Sie ferner (gegebenenfalls) numerisch die verschiedenen Schnittpunkte der Tangente mit dem Graphen.

Aufgabe 45:

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x, y, z) \mapsto \exp(xy) \arctan(yz)$.

(a) Berechnen sie alle zweiten Ableitungen von f

(b) Berechnen sie den Gradienten und die Richtungsableitung in Richtung $(1, 1, 1)$.

(c) Werten Sie die Richtungsableitung in Richtung $(1, 1, 1)$ in den Punkten $(0, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$ aus.

Besprechung in den Übungen vom 18.-21. Januar 2016.