

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 10. Übungsblatt

Aufgabe 39:

Wir betrachten das Katenoid

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, \cos(x_1) \cosh(x_2), \sin(x_1) \cosh(x_2)).$$

Berechnen Sie für die Matrix $G(x_1, x_2)$ mit Einträgen $g_{ij}(x_1, x_2) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, x_2), \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x_1, x_2) \rangle$ die Determinante $\det(G(x_1, x_2))$.

Aufgabe 40:

Sei $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) = 1\}$ ein Quadrat im \mathbb{R}^2 und für

$$A := \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gegeben. Zeichnen Sie das Bild von Q unter der Abbildung f , d.h. die Menge $f(Q) = \{f(x) : x \in Q\}$.

Aufgabe 41:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := (3x^2 + x + y - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zeichnen Sie den Graphen von f über dem Quadrat $[-2, 2]^2$. Fügen Sie einmal Schnitte in x - und y -Richtung und in einmal $(1, 1)$ - und $(1, -1)$ -Richtung in dickem Schwarz im Abstand $\frac{1}{2}$ hinzu.

Aufgabe 42:

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x^2 - y^2 + z^2 - (x^2 + 2y^2 + 4z^2)^2.$$

Es stellt sich heraus, dass alle interessanten Punkte in der Ebene $\{y = 0\}$ liegen.

Zeichnen Sie den Graph von f über dem Rechteck $[-1, 1] \times [-1/2, 1/2]$ in der $(x, 0, z)$ -Ebene.

Die folgenden Optionen sind dabei nützlich: `style=patchcontour`, `contours=35`, `view = -0.3 .. 0.3`, `numpoints=3000`. Auf diesem Bild sieht man zwei der drei Sattelpunkte sehr gut. Warum sieht man den dritten nicht? Erstellen Sie ein ähnliches Bild, welches den dritten Sattelpunkt zeigt.