

**Numerik II – 9. Übungsblatt****Aufgabe 35:**

Beweisen Sie den folgenden Satz: Seien  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch und positiv definit,  $V$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  und  $\Phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ . Sei  $x \in V$ , dann gilt

$$\Phi(x) = \min_{y \in V} \Phi(y) \iff y^T Ax = y^T b \quad \forall y \in V$$

**Aufgabe 36:**

Zeigen Sie die folgenden Invarianzeigenschaften von Krylov-Räumen:

- (a) Skalierung:  $\mathcal{K}_m(\alpha A, \beta b) = \mathcal{K}_m(A, b)$  für alle  $\alpha, \beta \neq 0$ .
- (b) Translation:  $\mathcal{K}_m(A - \alpha I, b) = \mathcal{K}_m(A, b)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
- (c) Basiswechsel:  $\mathcal{K}_m(TAT^{-1}, Tb) = T\mathcal{K}_m(A, b)$  für alle nicht singulären Matrizen  $T$ .

**Aufgabe 37:**

Implementieren Sie das CG-Verfahren zur Minimierung nichtquadratischer Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (Algorithmus 2.11 mit Fletcher-Reeves aus der Vorlesung) mit einer Armijo-Liniensuche in MATLAB. Verwenden Sie

```
function [x,xall] = con_grad(f, g, x0, tol)
```

als erste Zeile. Dabei bezeichnet **f** den Handle auf die Funktion, **g** den Handle auf deren Gradienten, **x0** den Startpunkt und **tol** den Parameter für das Abbruchkriterium. Zurückgegeben werden sollen die Approximation **x** der Minimalstelle und alle Zwischenschritte in einer Matrix **xall** (also **xall=[x0,x1,x2,...,xm]**).

Lösen Sie hiermit die folgenden Aufgaben:

- (a) Minimiere die Funktion  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$  (Himmelblau-Funktion) mit  $\text{tol}=10^{-1}$  und  $x0 = (-0.27, -0.91)^T$ ,  $x0 = (-0.271, -0.91)^T$ ,  $x0 = (-0.25, -1.1)^T$  und  $x0 = (-0.25, -1)^T$ .
- (b) Minimiere die Funktion  $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 105(x_2 - x_1^2)^2$  (Rosenbrock-Funktion) mit  $x0=(0.5, -1)^T$  und  $\text{tol}=10^{-2}$

Plotten Sie in beiden Fällen die Funktion und jeweils die Pfade der ersten 40 Zwischenschritte zu den verschiedenen Startwerten.

**Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 6. Januar 2016 zu Beginn der Vorlesung.**  
**Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis 5. Januar 2016, 23:59 Uhr an den Übungsgruppenleiter.**