Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Andreas Troll

9.12.2015

31	32	33	34	Σ

Name: ____________

Mat-Nr.: ____________

Name: ____________

Mat-Nr.: ____________

Gruppe: ____________

Numerik II – 8. Übungsblatt

Aufgabe 31:

Sei $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist durch $\langle x, y\rangle_H := x^T Hy \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert, welches die Norm $\|x\|_H = \sqrt{x^T Hx} \; \forall x \in \mathbb{R}^n$ induziert.

Sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) \neq 0$ gegeben. Bestimmen Sie eine Lösung des Problems

$$\min_{d:\|d\|_H=1} \nabla f(x)^T d$$

Warum ist damit Satz III.2.1 der Vorlesung bewiesen?

Aufgabe 32:

Implementieren Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$ durch die Minimierung des quadratischen Funktionals $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$. Verwenden Sie dazu die exakten Schrittweiten α_k aus der Vorlesung und testen Sie ihr Verfahren anhand geeigneter Beispiele.

Aufgabe 33:

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A werde iterativ mit der Methode des steilsten Abstiegs gelöst.

(a) Zeigen Sie, dass mit den optimalen Schrittweiten α_k aus der Vorlesung zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen zueinander orthogonal sind.

(b) Zeigen Sie weiterhin, dass dann in der Norm $\|v\|_A = \sqrt{v^T Av}$ für den Fehler der Iterierten gilt

$$\|x_{k+1} - \widehat{x}\|_A \leq \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa_2(A)}}\, \|x_k - \widehat{x}\|_A.$$

($\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$.) Das Verfahren konvergiert also.

Hinweis: Es ist $(\widehat{x} - x_k)^T A(\widehat{x} - x_k) = r_k^T A^{-1} r_k$. Rechnen Sie nach, dass

$$r_{k+1}^T A^{-1} r_{k+1} = r_{k+1}^T A^{-1} r_k = r_k^T A^{-1} r_k \left(1 - \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k} \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A^{-1} r_k}\right)$$

und schließen Sie daraus die Behauptung.

Aufgabe 34:

Zeigen Sie: Falls $0 < c_2 < c_1 < 1$ gilt, kann es sein, dass es für eine Abstiegsrichtung $s \in \mathbb{R}^n$ (mit $\|s\|_2 = 1$) von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es keine Schrittlänge $\alpha > 0$ gibt, die die Wolfebedingung

$$\begin{aligned} f(x + \alpha s) &\leq f(x) + c_1\alpha\nabla f(x)^T s \\ \nabla f(x + \alpha s)^T s &\geq c_2\nabla f(x)^T s \end{aligned}$$

erfüllt.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 16. Dezember 2015 zu Beginn der Vorlesung. Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis 15. Dezember 2015, 23:59 Uhr an den Übungsgruppenleiter.