Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Andreas Troll

25.11.2015

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

23	24	25	26	Σ

Name: ____________

Mat-nr.: ____________

Name: ____________

Mat-nr.: ____________

Gruppe: ____________

Numerik II – 6. Übungsblatt

Aufgabe 23:

Beweisen Sie Lemma 1.6 aus der Vorlesung:
Gibt es zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mit $1 \leq rang(X) = k \leq n$ und ein $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ so, dass $AX = XB$, dann gilt

(a) $R(AX) \subseteq R(X)$ (alte Version: $R(AX) \subseteq R(XB)$)

(b) $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$

Aufgabe 24: (Varianten des Satzes von Gershgorin)

(a) Zeigen Sie, dass eine reelle Matrix, deren Gershgorin-Kreise alle disjunkt sind, nur reelle Eigenwerte hat.

(b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$|z - a_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_j |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

liegen, wobei $d_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ beliebige positive Skalierungsfaktoren sind.

Hinweis: Eigenwerte sind invariant unter Ähnlichkeitstransformationen.

Aufgabe 25: (Bauer-Fike)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ diagonalisierbar, $X^{-1}AX = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und sei μ ein näherungsweiser Eigenwert mit näherungsweisem Eigenvektor $y \in \mathbb{C}^n$ mit $\|y\|_p = 1$. Zeigen Sie, dass in jeder p-Norm

$$\min_{1\leq j\leq n} |\mu - \lambda_j| \leq \kappa_p(X) \|r\|_p,$$

wobei $r = Ay - \mu y$ der Residuenvektor ist.

Aufgabe 26: (QR Algorithmus ohne Shifts)

Implementieren Sie den QR Algorithmus ohne Shifts aus der Vorlesung. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `HH = qralg(H,tol)`, die den ungeshifteten QR Algorithmus auf eine obere Hessenbergmatrix $H \in \mathbb{C}^{m \times m}$ angewendet. Brechen Sie ab, wenn der betragsmäßig größte Eintrag der unteren Nebendiagonalen kleiner als `tol` ist.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `ew=findeeigenwerte(A,tol)`, die zunächst die obere Hessenbergform einer Matrix `A` berechnet und dann `qralg` verwendet um alle Eigenwerte von `A` zu berechnen. Speichern Sie die berechneten Eigenwerte in einem geeigneten Vektor `ew`.

(c) Testen Sie ihre Implementation mit Matrizen mit reellen Eigenwerten und der Hilbertmatrix (`hilb`).

(d) Erstellen Sie einen $n \times n$ Jordanblock J (obere Dreicksmatrix). Stören Sie diesen mit einem ϵ an der Stelle $j_{n,1}$. Plotten Sie die Eigenwerte der (gestörten) Matrizen für verschiedene $\epsilon \geq 0$ in jeweils verschiedenen Farben in das gleiche Fenster. Was fällt Ihnen auf?

Hinweis: Die Matlabfunktionen `hess` und `qr` dürfen Sie verwenden.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 2. Dezember 2015 zu Beginn der Vorlesung. Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis 1. Dezember 2015, 23:59 Uhr an den Übungsgruppenleiter.