MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

18.11.2015

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

18	19	20	21	22	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

GRUPPE: ____________________

Numerik II – 5. Übungsblatt

Aufgabe 18:

Zeichnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & i & 1 & 1 \\ 2i & 0 & -2i & 0 \\ -1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2+4i \end{bmatrix}$$

mithilfe von Gershgorin-Kreisen eine möglichst kleine Menge in der sich die Eigenwerte von A befinden.

Aufgabe 19:

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

eine Matrixnorm ist. Diese wird als die *Frobenius-Norm* bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm nicht als eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm aufgefaßt werden kann.

(b) Zeigen Sie das die Frobeniusnorm submultiplikativ ist, also dass für $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ gilt

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

(c) Ist $\{v^1, ..., v^n\}$ eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Av^i\|_2^2.$$

(d) Mit

$$\mathrm{Spur}(M) := \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$$

wird die *Spur* der Matrix $M = (M_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{Spur}(A^T A).$$

Aufgabe 20:

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

(a) $\|uv^T\|_F = \|u\|_2 \|v\|_2$.

(b) $det(I + uv^T) = 1 + u^T v$.

Aufgabe 21: (Eigenschaften des Wertebereichs)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Wertebereichts $\mathcal{F}(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$:

(a) $\mathcal{F}(A + \alpha I) = \mathcal{F}(A) + \alpha$ und $\mathcal{F}(\alpha A) = \alpha \mathcal{F}(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Für den Hermiteschen Anteil $H = \frac{1}{2}(A + A^H)$ von A gilt $\mathcal{F}(H) = \mathrm{Re}\mathcal{F}(A)$, wobei $\mathrm{Re}\mathcal{F}(A)$ die Projektion von $\mathcal{F}(A)$ auf die reelle Achse bezeichnet.

(c) $\mathcal{F}(A+B) \subset \mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B)$ für alle $B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Geben Sie ein Beispiel, für das eine echte Inklusion vorliegt.

Aufgabe 22:

(a) Es sei $A = xy^H$, wobei x und y Vektoren in $\mathbb{C}^n$ sind, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass 0 ein Eigenwert von A mit Vielfachheit mindestens $n - 1$ ist und dass der verbleibende Eigenwert $\lambda = y^H x$ ist.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Householder-Matrix $P = I - 2uu^H$, $\|u\| = 1$.

Abgabe am Mittwoch, 25. November 2015 in der Vorlesung