MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

11.11.2015

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

14	15	16	17	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 4. Übungsblatt

Aufgabe 14:

Zeigen Sie für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

(a) Aus $AA^H = A^H A$ folgt nicht $A = A^H$

(b) Ist A hermitesch, d.h. $A = A^H$, dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 15: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und e_1, e_2, e_3 bezeichnen die üblichen Einheitsvektoren, d.h. die $i-$te Komponente von e_i ist Eins und die restlichen Null. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{R}(e_3), \mathcal{R}(e_1), \mathcal{R}([e_1, e_2])$, $\mathcal{R}([e_1, e_2, e_3])$ sind rechts A-invariante Unterräume.

(b) $\mathcal{R}(e_2)$ ist kein rechts A-invarianter Unterraum.

Aufgabe 16:

(a) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tridiagonal, d.h. $a_{ij} = 0$ falls $|i-j| > 1$, und hermitesch. Zeigen Sie, dass wenn alle Nebendiagonaleinträge nicht Null sind, d.h. $a_{ij} \neq 0$ falls $|i-j| = 1$, dann sind alle Eigenwerte von A verschieden.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$, $A - \lambda I$ mindestens Rang $n-1$ besitzt.

(b) Angenommen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe obere Hessenberg-Form, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i - j > 1$ (A ist obere Dreiecksmatrix mit einer zusätzlichen unteren Nebendiagonalen), und alle unteren Nebendiagonaleinträge seien nicht Null, d.h. $a_{ij} \neq 0$ für $i - j = 1$. Finden Sie ein Gegenbeispiel dafür, dass die Eigenwerte von A nicht notwendigerweise paarweise verschieden sein müssen.

Aufgabe 17: Zeigen Sie, dass die Matrix

$$F_n = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

das charakteristische Polynom $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$ hat. (F_n wird *Frobenius-Begleitmatrix* von p genannt.) Bestimmen Sie dann die Eigenvektoren von F_n zum Eigenwert λ und zeigen Sie, dass es auch dann nur einen Eigenvektor gibt, wenn λ ein mehrfacher Eigenwert ist.

Abgabe am Mittwoch, 18. November 2015 in der Vorlesung