MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

04.11.2015

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

10	11	12	13	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

GRUPPE: ____________________

Numerik II – 3. Übungsblatt

Aufgabe 10: (Differentiation gestörter Daten)

Zu einer gegebenen (gestörten) 2π–periodischen Funktion b möchte man eine geglättete Ableitung berechnen. Zeigen Sie: Die Lösung u (u 2π-periodisch, mit $\int_0^{2\pi} u(t)\,dt = 0$) des Minimierungsproblems

$$\int_0^{2\pi} |U(x) - b(x)|^2\,dx + \alpha \int_0^{2\pi} |u''(x)|^2\,dx = \min!, \qquad \alpha > 0,$$

mit U Stammfunktion von u ($U' = u$) ist gegeben durch die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{u}(n) = \frac{1}{1+\alpha n^6}\, i\, n\, \widehat{b}(n)\ .$$

Aufgabe 11: (Zweidimensionale FFT)

Einer stetigen Funktion $f : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{C}$ kann man entsprechend dem eindimensionalen Fall eine formale zweidimensionale Fourierreihe

$$f(\theta,\phi) \sim \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k} e^{i(j\theta+k\phi)}$$

zuordnen, wobei die Koeffizienten $\alpha_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{Z}$ durch

$$\alpha_{j,k} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} f(\theta,\phi) e^{-i(j\theta+k\phi)} d(\theta,\phi)$$

gegeben sind.

Im Folgenden sei N gerade.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten des (zweidimensionalen) trigonometrischen Polynoms

$$t_N(\theta,\phi) = \frac{1}{N^2} \sum_{j,k=1-N/2}^{N/2} \widehat{\alpha}_{j,k} e^{i(j\theta+k\phi)},$$

das die Interpolationsaufgabe

$$t_N(\theta_k,\theta_l) = f(\theta_k,\theta_l), \qquad k,l = 0,\ldots,N-1$$

mit den Abszissen $\theta_k = 2k\pi/N$ löst.

(b) Es sei $Y = (f(\theta_k,\theta_l))_{k,l=0}^{N-1}$ die $N \times N$-Matrix der zu interpolierenden Funktionswerte von f.

Zeigen Sie, dass eine geeignete Anordnung der Koeffizienten $\widehat{\alpha}_{j,k}$ aus (a) in einer $N \times N$-Matrix C existiert, so dass

$$C = FYF,$$

wobei F die Fouriermatrix, $F = (\omega_N^{kl})_{k,l=0}^{N-1}$ mit $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$, ist.

Aufgabe 12:

Berechnen Sie:

(a) Die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$ der 2π-periodischen Funktion $f(x) = 13\sin(5x) - 7\cos(29x) + e^{-2ix}$

(b) Die diskreten Fourierkoeffizienten (Approximation durch Trapezregel) $\hat{f}_N(k)$ für alle N und $0 \leq k \leq N-1$ (Für f wie in a)). Ab welchem N sind alle diskreten Fourierkoeffizienten identisch mit den exakten Fourierkoeffizienten?

Aufgabe 13:

(a) Auf der www Seite der Vorlesung finden die Matlabdatei `fft_conv_deconv.m`. Implementieren Sie dafür die Tichonovregularisierung zur Rekonstruktion der durch Messfehler gestörten Daten. Überlegen Sie sich eine Strategie zur Wahl des Regularisierungsparameters.

(b) Auf der www Seite der Vorlesung finden sie die *point-spread-function* eines Infrarotteleskops und eine Aufnahme von vier Sternen. Rekonstruieren das Ausgangssignal.

Pro Aufgabe gibt es fünf Punkte.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 11. November 2015 zu Beginn der Vorlesung. Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis 10. November 2015, 23:59 Uhr an den Übungsgruppenleiter.