MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

28.10.2015

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

| 6 | 7 | 8 | 9 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

NAME: __________
MAT-NR.: __________
GRUPPE: __________

# Numerik II – 2. Übungsblatt

## Aufgabe 6:

Geben Sie einen schnellen Algorithmus zur Berechnung der ersten $N$ Koeffizienten des Produkts zweier formaler Potenzreihen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ und $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$ an.

## Aufgabe 7:

Es sei $f \in L^2(0, 2\pi)$ eine $2\pi$-periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten $\alpha_k$. Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten von $f(\cdot - s)$ für festes $s \in \mathbb{R}$ durch $\beta_k = e^{-iks}\alpha_k$ gegeben sind.

## Aufgabe 8:

Zeigen Sie für gerades $N \in \mathbb{N}$ :

(a) Für $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ periodisch fortgesetzt gilt: $\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine periodisch fortgesetzte gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade.

**Hinweis:** Eine gerade Folge hat für gerades $N$ die Form $[x_0\ x_1\ \cdots x_{N/2-1} \mid x_{N/2}\ \cdots x_2\ x_1]$.

## Aufgabe 9:

Gegeben seien $g_0, \dots, g_{N-1} \in \mathbb{R}$. Die diskrete Cosinus-Transformation (DCT) ist definiert durch

$$(DCT_N\, g)_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2N}\right) \qquad \forall k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zeigen Sie, dass man die DCT auch als Fouriertransformation eines geeigneten Vektors $f \in \mathbb{R}^{2N}$ schreiben kann.

Wie lässt sich dies ausnutzen, um mittels der FFT eine schnelle Cosinus-Transformation zu entwickeln?

Pro Aufgabe gibt es fünf Punkte.

**Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 4. November 2015 zu Beginn der Vorlesung. Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis 3. November 2015, 23:59 Uhr an den Übungsgruppenleiter.**