MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

27.01.2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

52	53	54	55	56	Σ

NAME: __________
MAT-NR.: __________
NAME: __________
MAT-NR.: __________
GRUPPE: __________

Numerik II – 13. Übungsblatt

Aufgabe 52:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine positiv definite Matrix mit Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$. Der Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ sei eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$, $k \leq n$:

$$b = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j v_j.$$

Zeigen Sie, dass das cg-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ mit Startwert $x^0 = 0$ die exakte Lösung nach höchstens k Schritten liefert.

Aufgabe 53:

Zeigen Sie, dass die rekursive Definition der Chebyshev Polynome

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

äquivalent ist zur expliziten Darstellung

$$T_n = \frac{1}{2}\left[\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n\right].$$

Aufgabe 54:

Es sei L der Abbruchindex des Lanczos-Verfahrens. Zeigen Sie, dass aus $\tilde{v}_{L+1} = 0$ oder $\tilde{w}_{L+1} = 0$ folgt, dass alle Eigenwerte von T_L auch Eigenwerte von A sind, d. h. $\sigma(T_L) \subseteq \sigma(A)$.

Aufgabe 55:

Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Zeigen Sie: Kennt man eine nichtsinguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass $A^T = SAS^{-1}$ gilt (eine solche Matrix gibt es immer), so kann man die Berechnung der Folge $\{w_m\}$ im Lanczos-Verfahren einsparen, wenn man $w_1 = Sv_1$ und $\gamma_m = \tilde{\gamma}_m$ wählt.

Hinweis: Zeigen Sie $w_m = Sv_m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Bitte wenden

<u>Aufgabe 56:</u> (Zusatzaufgabe)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste Iterierte $x^{(1)}_{\mathrm{CG}}$ des CG-Verfahrens angewandt auf f ausgehend von dem Startpunkt $x^{(0)} = 0$.

(b) Bestimmen Sie die erste Iterierte $x^{(1)}_{\mathrm{PCG}}$ des vorkonditionierten CG-Verfahrens angewandt auf f ausgehend von dem Startpunkt $x^{(0)} = 0$ mit dem Vorkonditionierer

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

(c) Vergleichen Sie den Fehler von $x^{(1)}_{\mathrm{CG}}$ mit dem von $x^{(1)}_{\mathrm{PCG}}$ in der A-Norm und in der euklidischen Norm. Entsprechen die Ergebnisse Ihrer Erwartung?

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 3. Februar 2016 zu Beginn der Vorlesung.