MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

20.01.2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

47	48	49	50	51	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 12. Übungsblatt

Aufgabe 47:

Sei $\{x^m\}$ die Folge der cg-Iterierten zur Lösung von $Ax = b$ mit Startwert x^0 und $\{y^k\}$ die Folge der cg-Iterierten zur Lösung von $Ax = b$ mit Startwert $y^0 = x^i$ für ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Ist die Aussage

$$y^k = x^{i+k}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-i,$$

im Allgemeinen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 48:

Angenommen, das Arnoldi-Verfahren bricht in Schritt m ab, d.h. $h_{m+1,m} = 0$. Zeigen Sie, dass dann

(a) $\mathcal{K}_m(A, b)$ ein A-invarianter Unterraum ist.

(b) $\mathcal{K}_m(A, b) = \mathcal{K}_{m+1}(A, b) = \mathcal{K}_{m+2}(A, b) = \dots$, also $\dim \mathcal{K}_n(A, b) = m$.

Aufgabe 49:

Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Führen Sie einen Schritt des Arnoldi-Verfahrens durch und geben Sie die Matrizen V_1, V_2 und $\tilde{H}_1$ in der Gleichung $AV_1 = V_2\tilde{H}_1$ explizit an.

(b) Bestimmen Sie die Näherung $x_1 = V_1 y_1$, die sich aus der Galerkin-Bedingung ergibt.

(c) Geben Sie den Namen des Krylov-Verfahrens an, das Sie gerade verwendet haben.

Aufgabe 50:

Schreiben Sie eine MATLAB Funktion `arnoldi`

$$\texttt{function } [\texttt{V}, \texttt{H}] = \texttt{arnoldi}(\texttt{A}, \texttt{r}, \texttt{m})$$

die zu gegebenem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, r \in \mathbb{C}^n$ und $m \geq 1$ eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_m$ des Krylov-Unterraumes $\mathcal{K}_m(A, r)$ mit Hilfe des Arnoldi Prozesses berechnet ($\texttt{V} = [v_1 \mid \dots \mid v_m] = V_m$, $\texttt{H} = H_m$).

Testen Sie Ihre Implementierung mit einem Skript anhand der Hilbert Matrix der Größe 100×100 (MATLAB Funktion `hilb`) und $r = (1, \dots, 1)^H$.

(a) Berechnen Sie $\|V_m^H V_m - I\|_F$ für $m = 1, 5, 10, 100$.

(b) Berechnen Sie $\|V_m^H A V_m - H_m\|_F$ für $m = 1, 5, 10, 100$.

(c) Verwenden Sie die MATLAB Funktion `imagesc` um $V_m^H V_m - I$ sowie $V_m^H A V_m - H_m$ zu illustrieren und erklären Sie Ihre Beobachtungen.

Aufgabe 51: (Alte Klausuraufgabe)

Zur Berechnung eines stationären Punktes (Minimums) des Polynoms

$$p(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{4}t^4 - 6t^2 + 1$$

kann man das Newton-Verfahren verwenden.

(a) Geben Sie hierfür die Iterationsvorschrift an.

(b) Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $t_0 = 2$ zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Minimierung von $p(t)$.

Es wird 13 Blätter geben und 54 gewertete Aufgaben.
Für die Zulassung reichen also $54 \cdot 5 \cdot 0.4 = 108$ Punkte.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 27. Januar 2016 zu Beginn der Vorlesung. Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis 26. Januar 2016, 23:59 Uhr an den Übungsgruppenleiter.