MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

13.01.2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

43	44	45	46	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 11. Übungsblatt

Aufgabe 43:

Zeigen Sie den letzten Teil aus 1.6:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$ und x_k eine Folge von approximativen Lösungen von $Ax = b$. Zeigen Sie, dass für den Fehler $e_k = x_k - x^*$, wobei $x^* = A^{-1}b$ und $r_k = b - Ax_k$, gilt

$$\frac{1}{\kappa(A)}\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|} \leq \frac{\|e_k\|}{\|e_0\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|}$$

Aufgabe 44:

Beweisen Sie Satz 1.8:
Ist $AV_m = V_mH_m$ und ist $W_m^HV_m$ invertierbar, so ist $x_m = V_my_m$, wobei y_m durch (G) oder (M) charakterisiert ist, die exakte Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 45:

Beweisen Sie Lemma (2.3):
Sind $V_k = [v_1, \dots, v_k]$, $\tilde{H}_k = (h_{ij})$ mit v_j und h_{ij} aus (2.1) und b_k k-ter Einheitsvektor, dann gilt

(a) $V_k^HV_k = I_k$

(b) $AV_k = V_{k+1}\tilde{H}_k = V_kH_k + h_{k+1,k}v_{k+1}b_k^T$

(c) $V_k^HAV_k = H_k$

(d) Falls $A = A^H$, so ist $H_k = H_k^H$ tridiagonal

Aufgabe 46: (Alte Klausuraufgabe)

(a) Zeichnen Sie die Gershgorinkreise folgender Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & i & 0 & 1 \\ 0.5 & (2+2i) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & (-1-i) \end{pmatrix}$$

(b) Beweisen Sie folgende Variante des Satzes von Gershgorin:
Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwert λ gibt es einen (Spalten-)Index j so, dass

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

(c) Verkleinern Sie nun mit Hilfe von Aufgabenteil b) soweit möglich die in Aufgabenteil a) markierten Bereiche für die Eigenwerte von A.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 20. Januar 2016 zu Beginn der Vorlesung.