MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL
21.10.2015

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

1	2	3	4	5	Σ

NAME: ____________________
MAT-NR.: ____________________
GRUPPE: ____________________

Numerik II – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei f 2π-periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel ergibt

$$\hat{f}_N(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)e^{-int_j} \qquad \text{mit} \qquad t_j = \frac{2j+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie: $\hat{f}_N(n) = \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l \hat{f}(n+lN)$.

Aufgabe 2:

Sei $V := \operatorname{span}\{e^{ikx} \mid -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}\}$ mit geradem N. Zeigen Sie:

(a)

$$((f,g)) := \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\overline{g(x_j)}, \qquad x_j = \frac{2\pi j}{N}$$

ist eine hermitsche Bilinearform (Sesquilinearform) in V mit

$$((e^{ijx}, e^{ikx})) = \begin{cases} N & \text{für} \quad j,k\in\mathbb{Z}\,\text{und}\, j-k = lN \,\text{für ein}\, l\in\mathbb{Z} \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $((\cdot,\cdot))$ ist ein Skalarprodukt (Innenprodukt) in V.

(c) $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}}$, $-\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}$, bilden eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass für einen absolut summierbare Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und ihre Fouriertransformierte $\hat{c}(t)$ gilt

(a) $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\hat{c}(t)dt$

(b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^2| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{c}(t)|^2 dt$

(vgl. Lemma 1.11)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die diskrete Faltung kommutativ und assoziativ ist.
Zur Erinnerung: Die Faltung $x \star y \in \mathbb{C}^N$ $(x, y$ periodisch fortgesetzt) ist definiert durch

$$(x\star y)_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_{k-j}y_j.$$

Aufgabe 5:

- Implementieren Sie für $N = 2^L$ die schnelle Fouriertransformation.
- Überlegen Sie sich einen geeigneten Test um Ihre Funktion zu überprüfen.

b.w.

Bemerkungen:

Pro Aufgabe gibt es fünf Punkte.

Bitte schreiben Sie auf jeden abgegebenen Übungszettel *lesbar* Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer. Die Abgabe der Zettel ist immer Mittwochs in der Vorlesung. Sie werden korrigiert in der jeweiligen Übungsgruppe zurückgegeben.

Zulassungsvoraussetzung für die Prüfung:

- Sie müssen mindestens 40% der Übungspunkte erreichen.
- Weiterhin müssen Sie mindestens drei Aufgaben in der Übungsgruppe vorrechnen.

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 28. Oktober 2015 zu Beginn der Vorlesung. Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis 27. Oktober 2015, 23:59 Uhr an den Übungsgruppenleiter.