Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

9. Dezember 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 34:

Überlegen Sie sich, dass die Quadraturformeln

(a)
$$\sum_{i=1}^{3} b_i f(c_i), b_i = 1/6, i = 1, ..., 3, c_1 = (1/2, 0), c_2 = (0, 1/2), c_3 = (1/2, 1/2)$$
exakt für Polynome in $\mathcal{P}_2$ auf dem Referenzdreieck ist und

(b)
$$\sum_{i=1}^{4} b_i f(c_i), b_i = 1/4, i = 1, ..., 4, c_i = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$
exakt für Polynome in $\mathbb{Q}_3$ auf dem Referenzquadrat ist.

Aufgabe 35:

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Operator

$$\begin{aligned} L \ : \ H^1(\widehat{K}) &\longrightarrow L^2(\widehat{K}), \\ v &\longmapsto \int_0^1 v(t,0)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ein linearer, stetiger Operator ist.

Aufgabe 36:

Beweisen Sie Lemma (4.6), d.h. zeigen Sie:

Unter den Voraussetzungen von Lemma (4.4) und falls $h/\rho < const$ ist, gilt

$$\|v - \Pi v\|_{0,K} \leq Ch^2 |v|_{2,K} \qquad \forall v \in H^2(K).$$

Hinweis: Skript von Frau Prof. Hochbruck

Aufgabe 37:

Zeigen Sie:

(a) Ist $T : V \to W$ linearer, beschränkter Operator und $\dim \operatorname{im}(T) < \infty$, so ist T kompakt.

(b) Ist Ω beschränkt, stückweise C^1 berandet und $\mathcal{T}_n$ eine Tringulierung von Ω in der nur Elemente mit Durchmesser $\leq 1/n$ enthalten sind. Dann ist

$$T_n : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega), v|_{K_i} \mapsto M_{K_i}(v)$$

kompakt. Dabei seien $\{ \ K_i \mid i \in I_n \ \} = \mathcal{T}_n$ die Dreiecke der Triangulierung und M_{K_i} der Mittelwert-Operator aus Lemma (5.1).

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 17. Dezember 2014, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81