MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

2. DEZEMBER 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 30:

Sei T ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $\{\boldsymbol{z}_i\}_{i=1,2,3}$ und dem Schwerpunkt $\boldsymbol{z}_4$. Für eine hinreichend glatte Funktion f und einen Punkt $\boldsymbol{z}$ sei $\delta_{\boldsymbol{z}} f := f(\boldsymbol{z})$ die Punktauswertung von f in $\boldsymbol{z}$. Weiter seien $\delta^x_{\boldsymbol{z}} f := \frac{\partial}{\partial x} f(\boldsymbol{z})$ bzw. $\delta^y_{\boldsymbol{z}} f := \frac{\partial}{\partial y} f(\boldsymbol{z})$ die Punktauswertung der partiellen Ableitung von f in x- bzw. y-Richtung in $\boldsymbol{z}$.

Zeigen Sie, dass $(T, \mathcal{P}_3(T), \Sigma)$ ein Finites Element ist, falls

$$\Sigma = \{\delta_{\boldsymbol{z}_i}\}_{i=1,\dots,4} \cup \{\delta^x_{\boldsymbol{z}_i}\}_{i=1,2,3} \cup \{\delta^y_{\boldsymbol{z}_i}\}_{i=1,2,3}.$$

(Dies ist das kubische Hermite-Element aus der Vorlesung.)

Aufgabe 31:

(a) Sei T_1 das Referenzdreieck (d.h. mit Ecken in $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$) und T_2 ein beliebiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Leiten Sie aus den Koordinaten der Eckpunkte von T_2 explizit eine affine Transformation her, also eine Abbildung $\boldsymbol{F} : T_1 \to T_2$ der Form $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$, so dass $T_2 = \boldsymbol{F}(T_1)$.

(b) Wie können Sie für die Matrix $\boldsymbol{B}$ aus (a) garantieren, dass $\det \boldsymbol{B} > 0$?

(c) Übertragen Sie Ihre Vorgehensweise auf Tetraeder in $\mathbb{R}^3$.

(d) Gibt es zwischen allgemeinen Vierecken in $\mathbb{R}^2$ affine Transformationen? Falls nicht, finden Sie eine Klasse von Vierecken, für die solche Abbildungen stets existieren.

Aufgabe 32:

Sei $T = [0,1]^2$ das Referenzquadrat. Schreiben Sie ein Programm in einer Sprache Ihrer Wahl (`Matlab, Maple, C, Fortran, Python,...`), das die Lagrange-Basis des Raums der bikubischen Polynome $\mathbb{Q}_3(T)$ (nodale Basis zu den Punktauswertungen in (x_i, y_i) mit $x_i, y_i \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$) grafisch darstellt. Überlegen Sie sich dazu explizit, wie die entsprechenden eindimensionalen Basisfunktionen auf dem Referenzintervall $[0,1]$ aussehen.

Aufgabe 33:

Beweisen Sie Lemma (1.13), d.h. zeigen Sie:

(a) I_K ist linear.

(b) $N_i(I_K(f)) = N_i(f)$ für alle i.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 10. Dezember 2014, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81