MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

25. NOVEMBER 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 26:

Finden Sie geeignete Voraussetzungen, sodass das elliptische Randwertproblem 2. Ordung der Form

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ bu + \frac{\partial}{\partial n_A} u = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \tag{R}$$

für konstante $b \in \mathbb{R}$ (ggf. welche?) eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: L und $\frac{\partial}{\partial n_A} u$ seien definiert, wie in der Vorlesung.

Aufgabe 27:

(a) Für $K \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$\mathbb{Q}_1(K) := \{ v \in C(K) \mid v(x,y) = a + bx + cy + dxy;\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \} .$$

Sei $T = [0,1]^2$ das Einheitsquadrat und $\Sigma = \{$Punktauswertungen in den Ecken$\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T, \mathbb{Q}_1(T), \Sigma)$ ein Finites Element ist und bestimmen Sie die nodale Basis. (Dieses Element heißt “bilinear”, weil die Formfunktionen linear auf jeder Kante sind.)

(b) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{$Punktauswertungen in den Kantenmittelpunkten$\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T, \mathbb{Q}_1(T), \widetilde{\Sigma})$ kein Finites Element ist.

Aufgabe 28:

Sei ℓ^2 der Raum der quadratisch summierbaren Folgen, d. h. $\ell^2 := \{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) \mid \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} < \infty \}$, mit der Norm $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$a : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n y_n,$$

stetig und positiv definit jedoch nicht ℓ^2-elliptisch ist.

b.w.

Aufgabe 29:

(a) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\widehat{K}, \mathcal{P}_{\widehat{K}}, \Sigma_{\widehat{K}})$ mit

$$\begin{aligned}
\widehat{K} &= \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1, x, y \geq 0 \ \right\}, \\
\mathcal{P}_{\widehat{K}} &= \text{ Polynome vom Grad } \leq 2, \\
\Sigma_{\widehat{K}} &= \text{ Punktauswertungen in den Ecken und den Seitenmittelpunkten.}
\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\widehat{K}, \mathcal{P}_{\widehat{K}}, \Sigma_{\widehat{K}})$ mit

$$\begin{aligned}
\widehat{K} &= \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1, x, y \geq 0 \ \right\}, \\
\mathcal{P}_{\widehat{K}} &= \text{ Polynome vom Grad } \leq 3, \\
\Sigma_{\widehat{K}} &= \text{ Punktauswertungen in } x_i,\ i = 1, ..., 10
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{array}{llll}
x_1 = (0,0), & x_2 = (1/3,0), & x_2 = (2/3,0), & x_4 = (1,0), \\
x_5 = (0,1/3), & x_6 = (1/3,1/3), & x_7 = (2/3,1/3), & \\
x_8 = (0,2/3), & x_9 = (1/3,2/3), & x_{10} = (0,1). &
\end{array}$$

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 3. Dezember 2014, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81