MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

18. NOVEMBER 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 21:

Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Gebiet aus Abbildung 1 C^1-berandet ist, oder nicht.

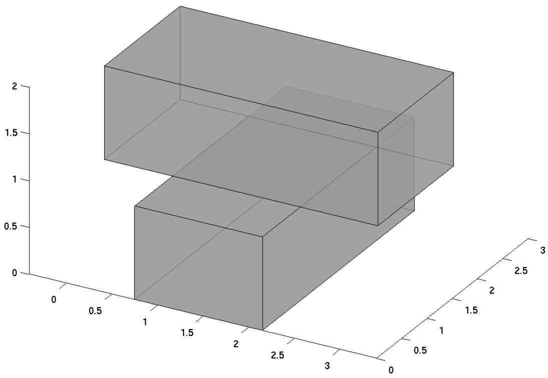

Abbildung 1: C^1-berandetes Gebiet?

Aufgabe 22:

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < x^5\}$ und $\Gamma = (0,1) \times \{0\}$. In Abbildung 2 ist dieses Gebiet abgebildet. Zeigen Sie, dass für

$$u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := \frac{1}{x}$$

gilt $u \in H^1(\Omega)$ aber $u|_\Gamma \notin L^2(\Gamma)$.

Aufgabe 23:

Man definiert: $u \in L^2(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ (für $i = 1, \ldots, n$), falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$(\phi, \partial_i u)_0 = -(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, u)_0 \qquad \text{für alle} \quad \phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Weiterhin sei $u \in H^1(\Omega)$ und $(v_k)_k \to u$ in $H^1(\Omega)$ mit $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so bezeichnen wir mit dem L^2-Limes

$$\mathrm{D}_i\, u := \lim_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} v_k,$$

die *verallgemeinerten Ableitungen* von u. Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1-Gebiete Ω:

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\partial u / \partial x_i$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen schwache Ableitungen.

b.w.

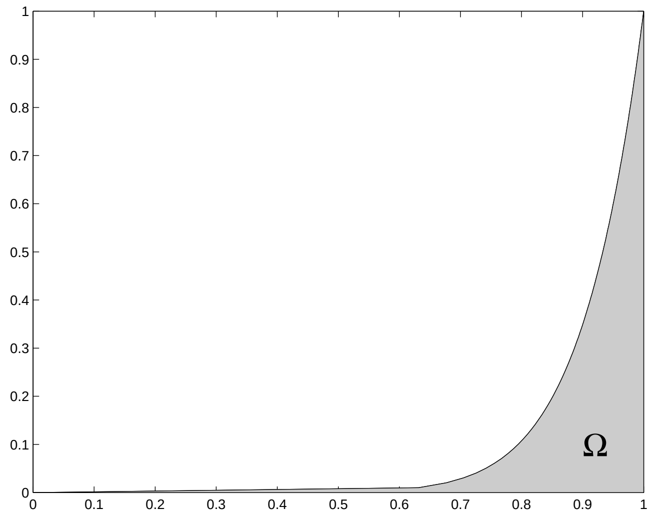

Abbildung 2: Gebiet Ω

Aufgabe 24:

Es sei eine Triangulierung eines beschränkten Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion u, die auf jedem Dreieck C^1 ist, gegeben. Zeigen Sie:

$$u \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow u \in C(\bar{\Omega})$$

Hinweis: Aufgabe 23 (a).

Aufgabe 25:

Zeigen Sie: Für ein stw. C^1-berandetes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und g stetig, stw. C^1 auf Γ gibt es ein $u_0 \in H^1(\Omega)$, so dass gilt:

$$\gamma(u_0) = g.$$

Hinweis: Aufgabe 24

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 26. November 2014, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81