MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

11. NOVEMBER 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 17:

Wir betrachten Lagrange-Finite-Elemente erster Ordnung auf dem Gebiet Ω aus Abbildung 1 mit der dort angegebenen Triangulierung. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Vorüberlegungen in Aufgabe 15 für die Differentialgleichung aus Aufgabe 15 (b) die Steifigkeitsmatrix.

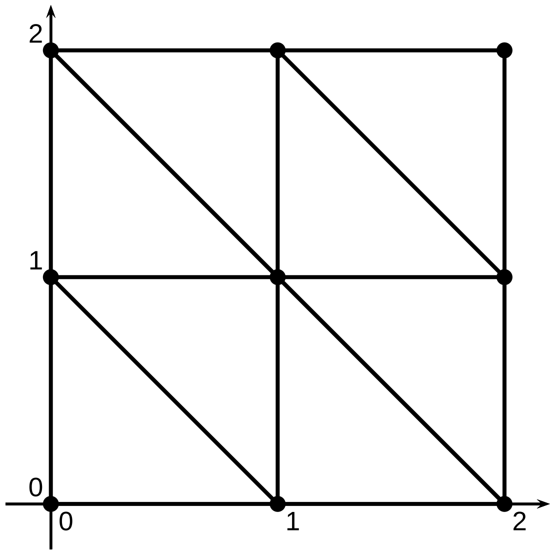

Abbildung 1: Gebiet mit Triangulierung für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

Aufgabe 18:

Zeigen Sie:

(a) Für $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ ist $\log \in L^2(\Omega)$ aber nicht in $C(\overline{\Omega})$.

(b) Für $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 < r^2,\ x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 < r < 1$ ist die Funktion

$$\left|\log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right|^{1/4} \in H^1(\Omega),$$

aber nicht in $C(\overline{\Omega})$.

b.w.

Aufgabe 19:

Sei $\Omega = \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1, x \leq 0 \text{ oder } y \geq 0 \ \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{C}$.

Überlegen Sie sich, dass $u(x,y) \mathrel{\widehat{=}} u(x+iy) = \operatorname{Im}(w(z)) = \operatorname{Im}(z^{2/3})$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(e^{i\varphi}) = \sin(\frac{2}{3}\varphi), & \varphi \in [0, 3/2\pi] \\ u = 0 & \text{sonst auf } \partial\Omega \end{cases}$$

erfüllt. Zeigen Sie weiterhin, dass ∇u auf Ω nicht beschränkt ist.

Aufgabe 20:

(a) Sei $\Omega = [0,1]$. Zeigen Sie, dass der Differentialoperator $T : (C^1(\Omega), \|\ \cdot\ \|_\infty) \to (C^0(\Omega), \|\ \cdot\ \|_\infty)$ mit $Tu = u'$ unbeschränkt ist, aber dass T beschränkt wird, wenn $C^1(\Omega)$ mit der Norm $\|u\| := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ ausgestattet wird.

(b) Sei nun $\Omega = (0,1)$. Zeigen Sie, dass der Differentialoperator $T : (H^1(\Omega), \|\cdot\|_{0,\Omega}) \to (L^2(\Omega), \|\cdot\|_{0,\Omega})$ mit $Tu = u'$ unbeschränkt ist, aber dass T beschränkt wird, wenn $H^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{1,\Omega}^2 := \|u\|_{0,\Omega}^2 + \|u'\|_{0,\Omega}^2$, der "richtigen" Sobolevnorm, ausgestattet wird.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 19. November 2014, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81