MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

4. NOVEMBER 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13:

Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = g \quad \text{auf } \Gamma. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) u ist Lösung von $(*)$

(b) Es gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) \mathrm{d}(x,y) = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma g v \,\mathrm{d}\sigma$$

für alle $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

(c) u ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right] \mathrm{d}(x,y) - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}(x,y) - \int_\Gamma g v \,\mathrm{d}\sigma = \min!$$

unter allen $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

Aufgabe 14:

Beweisen Sie die Green'schen Formeln aus der Vorlesung:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v \partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

und

$$\int_\Omega v\Delta u - u\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u - u \partial_\nu v \,\mathrm{d}\sigma. \tag{2}$$

mit $\Gamma = \partial\Omega$, $\vec{\nu} : \Gamma \to \mathcal{S}^n$ das äußere Normalenvektorfeld.

Welche Voraussetzungen benötigen Sie um den in der Analysis III Vorlesung vorgestellten Gaußschen Integralsatz (oder auch Divergenzsatz) anwenden zu können?

Aufgabe 15:

(a) Bestimmen Sie für die Dreiecke aus Abbildung 1 die linearen Basisfunktionen, die jeweils auf einer Ecke den Wert 1, auf den anderen beiden den Wert 0 annehmen.

(b) Bestimmen Sie für $\Omega = \Delta_1$ die 3x3 Steifigkeitsmatrix $A = (a(\varphi_r, \varphi_s))_{r,s}$ für die Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

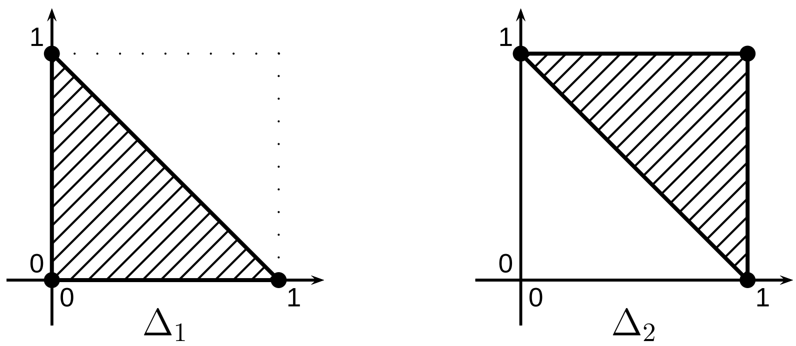

Abbildung 1: Dreiecke

Aufgabe 16:

(a) Sei $\Omega = (0,1)^2$ das Innere des Einheitsquadrates. Die Gitterweite sei $h = \frac{1}{N+1}$. Stellen Sie (z. B. in `MATLAB`) das lineare Gleichungssystem auf, das man bei der Diskretisierung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit einem Finite-Differenzen-Schema Ihrer Wahl von Konsistenzordnung mindestens 2 erhält. Dabei seien die Funktionen f und g geeignet (d. h. punktweise auswertbar in Ω bzw. auf $\partial\Omega$) gegeben.

Hinweis: Lösungsvektor und rechte Seite sollten N^2 Einträge haben; die Systemmatrix in $\mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ wird dünn besetzt sein. An welchen Stellen tauchen die $4(N+1)$ Werte von g an den Gitterpunkten am Rand $\partial\Omega$ auf?
Schlagen Sie die `MATLAB`-Befehle `kron` und `spdiags` nach. Bevor Sie `for`-Schleifen schreiben, um die Matrix aufzustellen, kommen Sie bei uns vorbei $\ddot\smile$.

(b) Testen Sie Ihre Implementierung indem Sie die Daten so wählen, dass Sie die tatsächliche Lösung bereits kennen. Lösen Sie das System (z. B. mit dem backslash-Operator \ in `MATLAB`) und überprüfen Sie das Ergebnis.

(c) Erinnern Sie sich an das Beispiel der in einem Draht eingespannten elastischen Membran in der Vorlesung. Wählen Sie entsprechend $f = 0$ und ein "interessantes" g. Stellen Sie die berechnete Lösung graphisch dar und schauen Sie sie sich an.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 12. November 2014, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81