Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

28. Oktober 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9: (Diskretes Vergleichsprinzip)

Beweisen Sie Korrolar 3.3 aus der Vorlesung.

Aufgabe 10:

(a) Zeigen Sie, dass die lokale Approximation des negativen Laplace-Operators durch den 5-Punkte-Stern die Konsistenzordnung 2 hat.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des kompakten 9-Punkte-Sterns

$$\frac{1}{6h^2}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_* .$$

Welche Voraussetzung an die Funktion u benötigen Sie?

Aufgabe 11: (Euler, 1779)

Sei das Variationsintegral

$$\mathcal{J}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 dx$$

auf

$$\mathcal{V} := \left\{ \ u \in \mathrm{PC}^1[0,1] \mid u(0) = u(1) = 0 \ \right\}$$

gegeben, wobei PC^1 der Raum der stetigen, stückweise stetig-differenzierbaren Funktionen ist.

(a) Raten Sie einen Minimierer u^* für $\mathcal{J}$.
Tipp: $\mathcal{J}(u^*) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Auf der kleineren Variationsklasse $\mathcal{V}^1 := \mathcal{V} \cap C^1[0,1]$ ist das Infimum des Funktionals immernoch 0, es wird allerdings von keiner C^1-Funktion angenommen.

b.w.

Aufgabe 12: (Implementierung von Kollokationsverfahren)

Implementieren Sie die auf dem letzten Übungsblatt beschriebenen Kollokationsverfahren. Dabei sollen wie dort die Kollokationsknoten $c_{1/2} = 1/2 \mp 1/6$ und damit stückweise Polynome vom Grad zwei verwendet werden.

Es soll $d = 1$ fest vorgegeben sein. Ihr Programm soll die folgende Signatur haben:

$$[\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \ldots, \lambda_{m-1,1}, \lambda_{m-1,2}] = \texttt{function koll(x, c, d, e, f, g)},$$

wobei

- $\texttt{x} = [x_1, \ldots, x_m]$ die Raumunterteilung ist,
- die rechte Seite durch $f(x, y) = \texttt{c}(x)y + \texttt{d}(x)$ und
- die Randbedingung durch $r(y(a), y(b)) = ey(a) + fy(b) - g = 0$ gegeben sind.

`c` und `d` sollen dabei als Funktionshandles übergeben werden können, benutzen Sie in Ihren Programm `c(x)` bzw. `d(x)` zur Auswertung.

Schreiben Sie ein `MATLAB` Skript `testeBeispiel`, welches die numerische Lösung von Aufgabe 7 des letzten Blattes berechnet und den Raumvektor aller Lagrangeknoten gegen den der Koeffizienten λ plottet. Dabei müssen Sie die letzte λ-Komponente aus der Randbedingung errechnen.

Schreiben Sie ein weiteres `MATLAB` Skript `testeBeispiel2`, welches das Randwertproblem

$$y'(x) = \sin(t)y + \cos(t), \qquad 2y(a) - y(b) = 1$$

auf dem Gitter $\texttt{x} = \{0, 1/4, 1/2, 1\}$ löst.

Hinweis: Benutzen Sie `c = @(x) sin(x)` und `d = @(x) cos(x)`.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 5. November 2014, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81