MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

16. OKTOBER 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

Sei $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, $n \geq 1$. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben und $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ definiert durch den Basiswechsel $v(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x})$. Zeigen Sie, dass $\Delta v = \Delta u$.

Aufgabe 6:

Beweisen Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung. Das heisst zeigen Sie, dass für alle $f \in C(\Omega, \mathbb{R}), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offes Gebiet mit

$$\int_\Omega fg \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, g \in C(\Omega, \mathbb{R})$$

die Identität

$$f \equiv 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega$$

erfüllt ist.

Aufgabe 7:

Sei $\Omega = [0,1]^2$ und die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

gegeben. Geben Sie die Matrix A und den Vektor b, aus dem linearen Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{2}$$

an, welches aus der Finite-Differenzen-Approximation obiger Gleichung mit einem regelmäßigen Gitter mit Gitterweite $h = \frac{1}{N+1}$ hervorgeht.

b.w.

Aufgabe 8: (Kollokationsverfahren für Randwertprobleme)

Betrachte das Randwertprobleme

$$
\begin{aligned}
&y' = f(x, y) \quad \text{auf} \quad [a, b], \qquad && f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \\
&r(y(a), y(b)) = 0
\end{aligned}
$$

Idee von Kollokationsverfahren: Suche Näherungslösungen u in einem Teilraum von $C([a, b], \mathbb{R}^d)$ und verlange, dass diese die Differentialgleichung in endlich vielen Punkten und die Randbedingung erfüllen.

Wähle eine Unterteilung von $[a, b]$ in $a = x_1 < \cdots < x_{m+1} = b$, nenne die Schrittweiten $h_j = x_{j+1} - x_j$. Wähle weiterhin *Kollokationsknoten* $c_1, \ldots, c_s \in [0, 1]$ paarweise verschieden.

Kollokationsverfahren: Suche $u : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, so dass

- $u|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathcal{P}_s$, $\mathcal{P}_s$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq s$.
- $u'(x) = f(x, u(x)) \quad$ für $x = x_j + c_k h_j$, $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq s$
- $r(u(a), u(b)) = 0$

Bestimmen Sie für $d = 1$, $s = 2$, die Kollokationsknoten $c_1 = 1/3$ und $c_2 = 2/3$, $m = 3$, $a = x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 7, x_4 = 10 = b$ und die rechte Seite $f(x, y(x)) = x + y(x)$ das entstehende lineare Gleichungssystem. Als Randbedingung sei $y(a) + y(b) = 1$ vorgegeben.

Hinweis: Benutzen Sie für die Darstellung der Polynome die Lagrange-Basis zu den Knoten $0, 1/2, 1$

$$u_i(\tau) = \sum_{k=0}^{s} \lambda_{i,k} l_{i,k}(\tau),$$

wobei Sie die Polynome auf das Einheitsintervall tranformieren. Wieso ergeben sich Polynome zweiten Grades? Vergessen Sie bei Aufstellung des Gleichungssytems nicht die Stetigkeit von u.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 29. Oktober 2014, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81