MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

27. JANUAR 2015

Numerik partieller Differentialgleichungen – 14. Übungsblatt

Aufgabe 54:

Zeigen Sie: Sei $(H, \|\,.\,\|)$ ein normierter Raum. Dann sind äquivalent

(a) $B = \{\ x \mid \|x\| \leq 1\ \}$ ist kompakt und

(b) $\dim(H) < \infty$.

Hinweis: Riesz-Lemma

Aufgabe 55:

Zeigen Sie: Die Eigenwerte eines stetigen, linearen, kompakten und symmetrischen Operators sind reell.

Aufgabe 56:

Seien $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Hilbertbasis eines Hilbertraums H und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Wir definieren den Operator $T : H \to H$ durch

$$Tx := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (x, e_n) e_n, \quad \text{für } x \in H.$$

(a) Zeigen Sie $T \in L(H)$ und

(b) T ist kompakt genau dann, wenn $\lambda_n \to 0$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren von T.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 4. Februar 2015, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81