MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

20. JANUAR 2015

Numerik partieller Differentialgleichungen – 13. Übungsblatt

Aufgabe 50:

Zeigen Sie, dass die Iterationsvorschrift

$$x^{(\mu+1)} = \left(I - \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} A_h\right) x^{(\mu)} + \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} b_h$$

im Modellproblem der mit $\omega = 1/2$ gedämpften Jacobi-Iteration entspricht.

Aufgabe 51:

Überlegen Sie sich, für welche θ die Richardsoniteration

$$x^{(k+1)} = (I - \theta A)x^k + \theta b$$

gegen $\widehat{x} = A^{-1}b$, mit A symmetrisch und positiv definit, konvergiert.

Aufgabe 52:

Finden Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf dem Intervall $\Omega = [0, \pi]$ sowohl für homogene Dirichlet-Randbedingungen als auch für homogene Neumann-Randbedingungen, d.h. finden Sie alle Lösungen von

(a)

$$\begin{cases} \Delta u = \partial_{xx} u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

(b) und

$$\begin{cases} \Delta u = \partial_{xx} u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ \partial_x u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 53:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des durch finite Differenzen auf $[0, 1]^2$ diskretisierten Laplace-Operators mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Als Schrittweite in x- und y-Richtung sei wie immer $h = \frac{1}{m+1}$ gewählt.

Hinweis: Benutzen Sie Ihr Wissen über die Eigenwerte der Jacobi-Iterationsmatrix.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 28. Januar 2015, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81