

Numerik partieller Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 46:

Berechnen Sie die Einträge der Prolongationsmatrizen für folgende Fälle. (*Äquivalent: Finden Sie eine Matrixdarstellung der natürlichen Einbettung.*) Nutzen Sie dabei aus, dass eine Verfeinerung eines Gitters über die Bilder einer Verfeinerung des Referenzelements erzeugt werden kann.

- Quadratische Lagrange-Elemente auf Intervallen in \mathbb{R} , Verfeinerung durch Halbierung jedes Intervalls.
- Lineare Lagrange-Elemente auf Dreiecksgittern in \mathbb{R}^2 , Verfeinerung durch Unterteilung jedes Dreiecks in vier kongruente Teildreiecke.
- Bilineare Elemente auf Vierecksgittern in \mathbb{R}^2 , Verfeinerung jedes Vierecks in vier Teilvierecke durch Verbinden der gegenüberliegenden Kantenmittelpunkte.
- Lineare Lagrange-Elemente auf Tetraedergittern in \mathbb{R}^3 , Verfeinerung jedes Tetraeders in acht Teiltetraeder unter Verwendung der Ecken und der Kantenmittelpunkte; siehe Aufgabe 32 (b).

Aufgabe 47: Zeigen Sie Lemma (4.3), d.h. zeigen Sie, dass gilt:

- $\|\cdot\|_s$ ist eine tatsächlich eine Norm
- $\|x\|_s \leq \|x\|_r^{1/2} \cdot \|x\|_t^{1/2}$ für $s = \frac{t+r}{2}$, und alle $x \in \mathbb{R}^N$,

mit der Definition aus der Vorlesung:

$$\|x\|_s = \sqrt{\langle x, A^s x \rangle}$$

Aufgabe 48:

Für die durch die Steifigkeitsmatrix definierten Normen $\|\cdot\|_s$ ist Ihnen bekannt, dass

$$\|v_h\|_1^2 \leq \|v_h\|_0 \cdot \|v_h\|_2 \quad \text{für alle } v_h \in V_h.$$

Zeigen Sie, dass für die Sobolev-Normen entsprechend gilt: Es gibt eine Konstante c , so dass

$$\|v\|_1^2 \leq c \|v\|_0 \cdot \|v\|_2, \quad \text{für alle } v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Geben Sie c explizit an.

Aufgabe 49:

Implementieren Sie das Gauß-Seidel Verfahren zum Lösen von

$$Au = b,$$

A sei dabei die finite Differenzen Approximation an den Laplace Operator auf $[0, 1]^3$ mit Gitterweite $h = 1/(m+1)$, $m = 49$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Wählen Sie $b = 0$ und $u^{(0)} = \text{rand}(m^3, 1)$. Führen Sie $k = 1000$ Iterationen durch. Plotten Sie den Logarithmus des Fehlers gegen die Anzahl der Iterationen.

Die Prämierung der Programme aus Aufgabe 45 wird auf diese erweitert.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 21. Januar 2015, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81