

Numerik partieller Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 42:

Finden Sie die Eigenvektoren zu den nicht-Null Eigenwerten der Gauß-Seidel Iterationsmatrix G für das Modellproblem.

Aufgabe 43: (Jacobi-Verfahren)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ strikt diagonaldominant, d.h.

$$\max_{i=1,\dots,n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Zeigen Sie, dass das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren angewandt auf $Ax = b$ bei beliebigen Startwert x_0 und für jede rechte Seite b gegen $A^{-1}b$ konvergiert.

Aufgabe 44:

Sei $L > 0$ ein festes feinstes Level und sei $u_L^k \mapsto u_L^{k+1}$ ein Schritt des Mehrgitterverfahrens. Mehrgitterverfahren sind lineare Iterationen, d. h. es gibt eine Iterationsmatrix $G \in \mathbb{R}^{N_L \times N_L}$, so dass für den Fehler $e_L^k = u_L - u_L^k$ gilt

$$e_L^{k+1} = G e_L^k.$$

- Geben Sie die Iterationsmatrix für das Zweigitterverfahren (also $L = 1$) explizit an. Verwenden Sie das gedämpfte Jacobi-Verfahren als Glätter. *Erinnerung: Die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens in \mathbb{R}^{N_ℓ} ist $I_\ell - \omega D_\ell^{-1} A_\ell$, wobei D_ℓ die Diagonale der Steifigkeitsmatrix A_ℓ und I_ℓ die Einheitsmatrix auf Level ℓ sind.*
- Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Spektralradius von G nur von $\nu_1 + \nu_2$ abhängt, nicht aber von der Anzahl der Vor- bzw. Nachglättungsschritte.

Aufgabe 45:

Implementieren Sie das Jacobi Verfahren zum Lösen von

$$Au = b,$$

A sei dabei die finite Differenzen Approximation an den Laplace Operator auf $[0, 1]^3$ mit Gitterweite $h = 1/(m + 1)$, $m = 49$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Wählen Sie $b = 0$ und $u^{(0)} = \mathbf{rand}(m^3, 1)$. Führen Sie $k = 1000$ Iterationen durch. Plotten Sie den Logarithmus des Fehlers gegen die Anzahl der Iterationen.

Die schnellste und die kürzeste Implementierung werden prämiert. In die Wertung der kürzesten Implementierung gehen nur `MATLAB`- bzw. `Octave`-Programme ein. Die Länge wird in Zeichen des Quellcodes gemessen, wobei alle Zeichen außer Leerzeichen, Tabulatoren, Zeilenumbrüchen, Semikola und Kommentaren gezählt werden. Alle Funktionen müssen in einer Datei enthalten sein.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 14. Januar 2015, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81