Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

16. Dezember 2014

Numerik partieller Differentialgleichungen – 10. Übungsblatt

Aufgabe 38:

Zeigen Sie, dass für jede Triangulierung eines einfach zusammenhängenden Gebietes gilt:

$$\textit{Anzahl der Dreiecke plus Anzahl der Knoten minus Anzahl der Kanten} = 1.$$

Warum gilt dies nicht, falls das Gebiet lediglich zusammenhängend ist?

Aufgabe 39:

Sei $I = [a,b]$ ein reelles Intervall. Die Vorschrift $u \mapsto \omega_I(u) := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ definiert ein Funktional ω_I auf $L^1(I)$. Wie üblich sei δ_x die Punktauswertung an der Stelle x (definiert für stetige Funktionen).

(a) Zeigen Sie, dass $(I, \mathbb{P}_2(I), \Sigma)$ ein finites Element ist, falls $\Sigma = \{\delta_a,\, \delta_b,\, \omega_I\}$. Bestimmen Sie die zu Σ duale Basis von $\mathbb{P}_2(I)$.

(b) Der zu Teil (a) gehörige globale Finite-Elemente-Raum enthält nur stetige Funktionen. Wieso lässt sich diese Konstruktion nicht auf Dreiecke in $\mathbb{R}^2$ übertragen?

(c) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{\delta_a,\, \omega_I\}$. Zeigen Sie, dass $\left(I, \mathbb{P}_1(I), \widetilde{\Sigma}\right)$ ein Finites Element ist. Wieso ist das Tripel $\left(I, \mathbb{P}_1(I), \approx\!\!\Sigma\right)$ mit $\overset{\approx}{\Sigma} = \{\delta_{(a+b)/2},\, \omega_I\}$ kein Finites Element?

(d) Seien nun $\hat{I} = [0,1]$ und $\widehat{\Sigma} = \{\omega_{[0,2/3]},\, \omega_{[1/3,1]}\}$. Ist $\left(\hat{I}, \mathbb{P}_1(\hat{I}), \widehat{\Sigma}\right)$ ein Finites Element?

Aufgabe 40:

Zeigen Sie, dass

$$\varphi \mapsto A\varphi, \qquad (A\varphi)(x) = \int_a^b \sin(x+y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

ein kompakter Operator auf $L^2([a,b])$, $b > a$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie nicht direkt die Definition, sondern Aussagen aus der Vorlesung.

b.w.

Aufgabe 41:

Triangulieren Sie das Gebiet aus Abbildung 1.

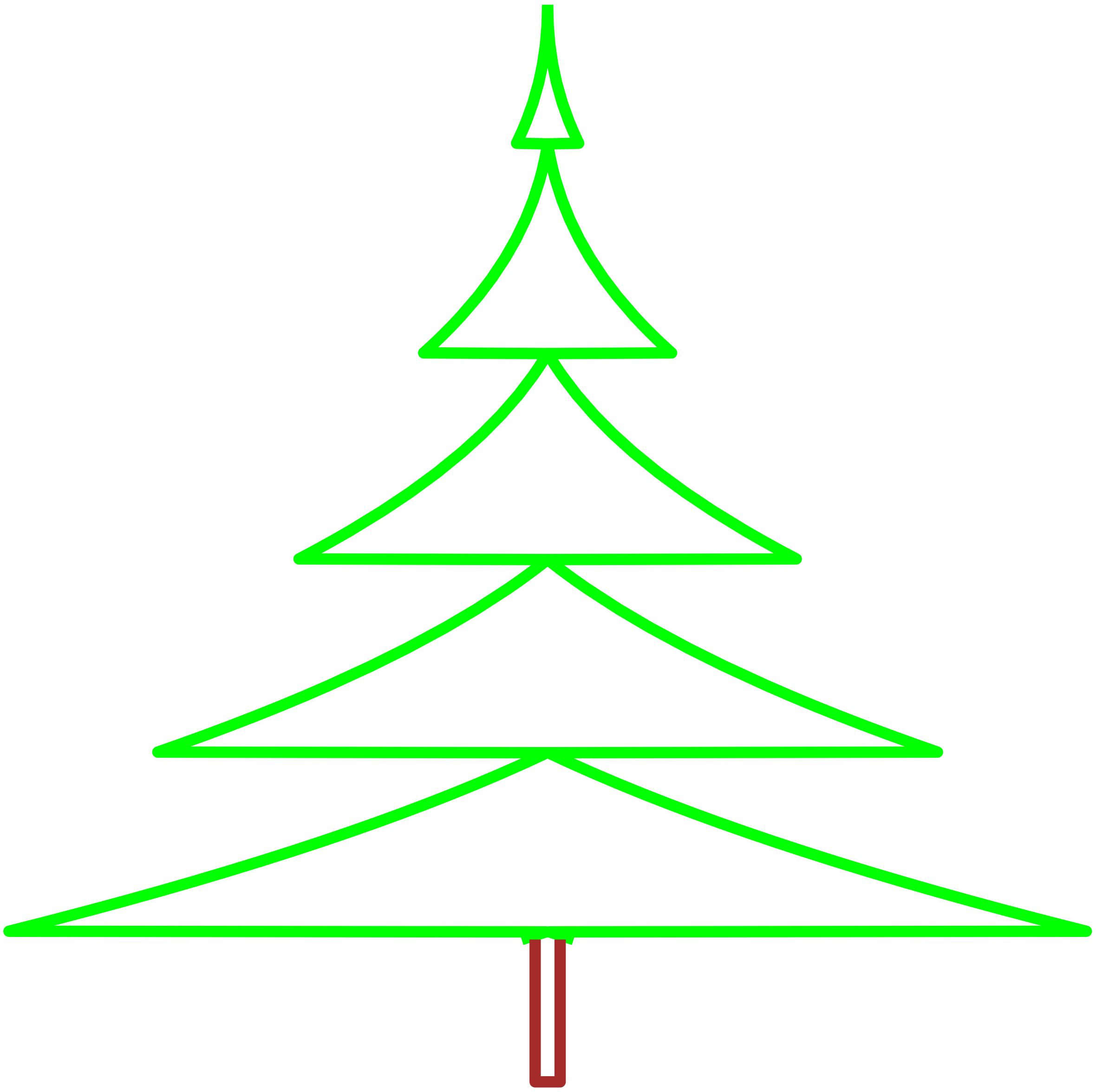

Abbildung 1: Gebiet Ω

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 7. Januar 2015, 8:30 Uhr in 25.22-O2.81