

Numerik partieller Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned}y''(x) &= 100y(x) + z(x) \\z'(x) &= \sin(y(x)) + x \\y(0) &= 1 \\y(1) &= 1 \\z(0) &= z(1)\end{aligned}$$

Transformieren Sie dieses System auf Standardform

$$\mathcal{Y}'(x) = f(x, \mathcal{Y}), \quad r(\mathcal{Y}(0), \mathcal{Y}(1)) = 0.$$

Aufgabe 2:

Für beliebige Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gelte die Erhaltungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma.$$

Hier seien $w : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ die gespeicherte Wärmeenergie (der Wärmeinhalt), $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine Wärmequelle sowie $\mathbf{q} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Wärmestrom/-fluss über $\partial\Omega$ in Richtung der äußeren Normalen $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$.

- (a) Zeigen Sie mithilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass in $\Omega \times \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} w - f + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0.$$

Nennen Sie die dazu notwendigen Voraussetzungen.

- (b) Es sei $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ die Temperatur (in Kelvin). Mit der Dichte ρ und der spezifischen Wärmekapazität c gilt $w = \rho c u$. Darüber hinaus beschreibt das Fouriersche Gesetz den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestrom durch

$$\mathbf{q} = -k \nabla u,$$

wobei k die Wärmeleitfähigkeit des Materials ist. Leiten Sie aus diesen Angaben und Teil (a) eine partielle Differentialgleichung für u her. Nehmen Sie dazu an, dass k , ρ und c konstant sind.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie allgemeine, stetige Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, t) \mapsto u(x, y, t)$, der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$(a) \frac{\partial}{\partial x} u = 17, \quad (b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 6y, \quad (c) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 2.$$

Beispiel: Die allgemeine Lösung von $\frac{\partial}{\partial t} u = 0$ ist

$$u(x, y, t) = v(x, y) \text{ mit } v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2) \text{ beliebig.}$$

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes Randwertproblem: Finde $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} y''(x) &= c\sqrt{1 + (y'(x))^2}, \quad \text{für } x \in (0, 1), \\ y'(0) &= 0, \\ y(1) &= h. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$y(x) = \kappa + \frac{1}{c} \cosh(cx)$$

obiges Randwertproblem löst, wobei Sie κ passend bestimmen.

Zulassungsvoraussetzungen für die Prüfung:

Aktive und erfolgreiche Mitarbeit in den Übungen. Das heißt:

- Die regelmäßige Teilnahme an den Übungen.
- Die Bearbeitung von mindestens 40 % der Übungsaufgaben. (Sie geben zu Beginn der Übung an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben und vorstellen können.)
- Das Vorrechnen von mindestens drei Aufgaben in den Übungen.