MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
LENNART JANSEN

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

27. NOVEMBER 2014

Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra – 6. Übungsblatt

Aufgabe 21:

(a) Schreiben Sie ein Skript `aufgabe21a.m`, das einen Vektor von Anfang bis Ende durchsucht und die erste Position k findet und ausgibt, bei an der eine Zahl kleiner als 0 auftritt. Der Vektor soll danach nicht weiter durchsucht werden. Tritt keine negative Zahl auf, soll Null ausgegeben werden.

(b) Kopieren Sie das Skript nach `aufgabe21b.m` und erweitern Sie dieses so, dass Produkt, Summe, Minimum, Maximum, Durchschnitt und Median der im Teil (a) gefundenen Zahlen (also der Zahlen an Positionen 1 bis $k-1$) berechnet werden.

Aufgabe 22: (Determinante mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz)

Schreiben Sie eine Funktion `function detA = detLaplace(A)`, die die Determinante einer gegebenen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (mit den Einträgen $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$) *rekursiv* gemäß der Vorschrift

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det \boldsymbol{A}_{1j}$$

berechnet. Dabei ist $\boldsymbol{A}_{1j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus $\boldsymbol{A}$ entsteht, wenn man die erste Zeile und die j-te Spalte streicht.

Testen Sie Ihre Funktion anhand einer Zufallsmatrix der Dimension 5×5 (d. h. vergleichen Sie mit dem Ergebnis der built-in MATLAB-Funktion `det`).

Aufgabe 23:

Seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1,\dots,n}$, für ein $n \in \mathbb{N}_+$. Schreiben Sie eine Funktion mit der Signatur `function res = detbinA(A,b,k)`. Diese soll für ein $1 \le k \le n$ die Determinante der Matrix

$$\boldsymbol{A}_k := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

berechnen. Sie können dabei die MATLAB-Funktion `det` oder die Funktion `detLaplace` aus Aufgabe 22 verwenden.

Aufgabe 24: (Intervallschachtelung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a)f(b) < 0$.

Intervallschachtelungsprinzip: Falls für eine Folge von Intervallen $([a_i, b_i])_{i\in\mathbb{N}}$ gilt, dass

(a) $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$ für $i \in \mathbb{N}$,

(b) $\lim_{i\to\infty}(b_i - a_i) = 0$ und

(c) $f(a_i)f(b_i) \leq 0$ für $i \in \mathbb{N}$,

dann ist $x^\star = \lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i$ Nullstelle von f.

Wählt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, so führt für $i = 0, 1, \ldots$ die Bisektion $x_i := (a_i + b_i)/2$ zur Konstruktionsvorschrift

$$\begin{cases} \text{falls } f(a_i)f(x_i) \leq 0, & \text{setze } a_{i+1} := a_i,\ b_{i+1} := x_i, \\ \text{sonst}, & \text{setze } a_{i+1} := x_i,\ b_{i+1} := b_i. \end{cases}$$

Für $i \in \mathbb{N}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_i - x^\star| \leq \frac{1}{2^{i+1}}(b_0 - a_0).$$

(a) Schreiben Sie eine Funktion `c = intervallschachtelung(f,a,b,tol)` die eine Nullstelle von f gemäß dem Intervallschachtelungsprinzip iterativ mit einer garantierten Genauigkeit von `tol` approximiert.

(b) Achten Sie darauf, dass die Funktion einen Fehler meldet, wenn $f(a)f(b) > 0$ ist.

(c) Testen Sie Ihre Funktion mit $u(x) = x^4 - 4$ und $v(x) = \cos(x)$ auf $[0, 2]$.

Besprechung in den Übungen am 01. Dezember 2014 - 04. Dezember 2014