MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
LENNART JANSEN

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

22. JANUAR 2015

Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra – 12. Übungsblatt

Aufgabe 49:

Implementieren Sie die QR-Zerlegung mittels Householder-Spiegelungen als MATLAB-Funktion `function [Q R] = qrzerlegung(A)` für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$.

Vergleichen Sie ihr Programm mit der MATLAB-Funktion `qr(A)`. Legen Sie dazu ein MATLAB-Skript an und messen Sie die Laufzeit ihrer Funktion und die der MATLAB-Funktion.

Aufgabe 50:

Setzen Sie `A = rand(25,25)` und `b = rand(25,1)`. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe einer QR-Zerlegung, ohne den MATLAB-Lösungoperator \ zu nutzen.

Vergleichen Sie ihr Programm dann mit dem MATLAB-Lösungoperator \. Legen Sie dazu ein MATLAB-Skript an und messen Sie die Laufzeit ihrer Funktion und die der MATLAB-Funktion.

Aufgabe 51:

Die folgende Tabelle gibt die Weltbevölkerung der letzten Jahre wieder:

Jahr	1803	1926	1961	1974	1986	1998	2012
Anzahl (Mrd.)	1	2	3	4	5	6	7

Es wird angenommen, dass für reelle Zahlen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ der folgende lineare Zusammenhang besteht:

$$\log(\text{Anzahl}) = x_1 \text{Jahr}^2 + x_2 \text{Jahr} + x_3.$$

(a) Seien $\boldsymbol{t} = (t_k)_{k=1,\dots,7} \in \mathbb{R}^7$ der Vektor bestehend aus den Jahreszahlen und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^7$ der zugehörige Vektor der Weltbevölkerung. Ferner seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_7^2 & t_7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \log(y_1) \\ \log(y_2) \\ \vdots \\ \log(y_7) \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$$

mit einer QR-Zerlegung ohne Hilfe des \-Operators.

(b) Plotten Sie die Punkte $(t_k, y_k)_{k=1,\dots,7}$ (verbunden durch einen Polygonzug) und die Funktion

$$t \mapsto e^{x_1 t^2 + x_2 t + x_3}$$

auf dem Intervall $[1800, 2050]$.

(c) Welche Schätzung für das Jahr 2030 liefert das Modell?

Aufgabe 52:

Inspizieren Sie die MATLAB-Funktion in der Datei `aufgabe52.m`. Die darin implementierte Funktion soll für eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine rechte Seite $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mithilfe der Cramerschen Regel lösen. Dabei sollen die auftretenden Determinanten jeweils mit der MATLAB-Funktion `det` berechnet werden. Vor der Anwendung der Cramerschen Regel soll durch geeignete Fehlerabfragen überprüft werden, ob die Matrix quadratisch ist und die rechte Seite die richtige Länge hat. Am Ende soll die Funktion die Euklidische Norm des Residuums ausgeben.

Die Datei enthält fünf inhaltliche oder syntaktische Fehler. Finden Sie die einzelnen Fehler und beheben Sie sie direkt in `aufgabe52.m`. Sie können die Funktion auch aufrufen (z. B. mit einer 5×5-Zufallsmatrix `A` und einer zufälligen rechten Seite `b`.)

```
function [x] = aufgabe52(A,b)

n = size(A,1);

if ~(size(A,1) == n)
    error('Die Matrix A ist nicht quadratisch.');
end

if ~(length(b) == n)
    error('Der Vektor b muss so viele Zeilen haben wie die Matrix A');
end

x = zeros(1,n);

for k = 1:n
    Ak = [A(:,1:k) b A(:,k+1:end)];
    x(k) += det(Ak);
end

x = x / det(A);

fprintf('Die Norm des Residuums betraegt %g.',norm(b-A'*x));
```

Das ist das vorletzte Blatt. Auf Blatt 13 wird es 4 Aufgaben geben. Für die Zulassung zur Klausur benötigen sie daher 22 Punkte.

Besprechung in den Übungen am 26. Januar 2015 - 29. Januar 2015