Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Lennart Jansen

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

15. Januar 2015

Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra – 11. Übungsblatt

Aufgabe 44:

Kreuzen Sie an:

	wahr	falsch
(a) Der Befehl `rand(10) + rand(10)'` erzeugt eine symmetrische 10×10-Matrix mit reellen Einträgen.	☐	☐
(b) Ein Matlab-Script kann auf alle Variablen im Workspace zugreifen.	☐	☐
(c) Eine Matlab-Funktion kann auf alle Variablen im Workspace zugreifen.	☐	☐
(d) Variablen, die in einem Matlab-Script angelegt werden, sind anschließend im Workspace verfügbar.	☐	☐
(e) Variablen, die in einer Matlab-Funktion angelegt werden, sind anschließend im Workspace verfügbar.	☐	☐
(f) Es gibt eine Zahl $a > 0$ in Matlab, so dass $1 + a == 1$ das Ergebnis 1 liefert.	☐	☐
(g) `2:10:20` ist eine Kurzschreibweise für `linspace(2,10,20)`	☐	☐
(h) `isempty(find(angle(A)))` und `~(norm(imag(A),inf)>0)` geben für eine Matrix `A` das gleiche Ergebnis aus.	☐	☐

Aufgabe 45:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Für $N \geq 1$ wähle einen Vektor $(x_i)_{i=1,\ldots,N}$ aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall $[a, b]$. Dann ist durch die Quadraturformel

$$\mathcal{Q}^N_{[a,b]}(f) := \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

eine Approximation des Integrals

$$\mathcal{I}_{[a,b]}(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

gegeben. (Der Fehler $\left|\mathcal{Q}^N_{[a,b]}(f) - \mathcal{I}_{[a,b]}(f)\right|$ verhält sich für festes f und $N \to \infty$ proportional zu $N^{-1/2}$.)

(a) Implementieren Sie die Monte-Carlo-Integration als `function Q = MonteCarlo(f,a,b,N)`.

(b) Testen Sie Ihr Programm für $f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$. (Matlab schafft ohne Probleme $N = 10^6$ Quadraturpunkte.)

Aufgabe 46:

Gegeben seien Punkte (z. B. Messdaten) $(t_i, f_i)_{i=1,\ldots,9}$ wie folgt.

t_i	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2
f_i	4	$5/2$	2	$5/2$	3	$5/2$	2	$5/2$	4

Es wird angenommen, dass für reelle Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ der folgende Zusammenhang besteht:

$$f(t) = x_1\, e^t + x_2\, e^{-t} + x_3\, t^2 + x_4$$

Gesucht sind die Parameter x_1, x_2, x_3, x_4, für die die Funktion f die Werte f_i in den Punkten t_i im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestmöglich approximiert.

(a) Formulieren Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem, d. h. stellen Sie eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{9\times 4}$ und einen Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^9$ auf, so dass die Parameter $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ von f die eindeutige Lösung des Problems

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$$

sind.

(b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der Singulärwertzerlegung von A. Geben Sie die Euklidische Norm des Residuums aus.

(c) Erstellen Sie folgende Graphik auf dem Intervall $[-2, 2]$.

(i) Stellen Sie die Datenpunkte $(t_i, f_i)_{i=1,\dots,9}$ als rote Kreuze (+) dar.

(ii) Verbinden Sie die Datenpunkte mit einem blauen Polygonzug.

(iii) Stellen Sie die Funktion f zu den berechneten Parametern als schwarze Kurve dar.

Aufgabe 47:

Es wird angenommen, dass es zwischen dem Energieumsatz (gemessen als Sauerstoffverbrauch pro Gewichtseinheit pro Zeit) und dem Körpergewicht bei Säugetieren einen allgemein gültigen Zusammenhang gibt. Um diesen zu finden stehen Ihnen folgende Daten zur Verfügung:

Art	Spitzmaus	Maus	Ratte	Katze	Hund	Mensch	Pferd
Gewicht (in g)	4.8	30	250	2 500	10 000	70 000	650 000
Sauerstoffverbrauch (in $ml/g/h$)	7.40	1.65	0.87	0.68	0.33	0.21	0.11

Quelle: Roger Eckert, *Tierphysiologie*. 2., neubearb. und erw. Aufl.. - Stuttgart (Thieme) 1993.

Wie hoch ist in etwa der Sauerstoffverbrauch eines Elefanten? (Ein Standardelefant wiegt 3 833 000 Gramm.)

(a) Finden Sie ein geeignetes Model für das Problem.

(b) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.

(c) Mit `x = A\b` erhalten Sie eine Lösung von $\min \|Ax - b\|_2$

(d) Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

Aufgabe 48:

(a) Schreiben Sie eine Funktion `y=computeeps(x)`, die für eine Zahl `x` die kleinste positive Zahl `y` berechnet, so dass die Aussage `x+y>x` wahr ist. Starten Sie die Iteration mit `y=1` und halbieren Sie `y` in jedem Schritt.

(b) Wählen Sie `format long` und testen Sie Ihr Programm:

- `computeeps(1)` ist `2.220446049250313e-16`,
- `computeeps(0)` ist `4.940656458412465e-324`.

Besprechung in den Übungen am 19. Januar 2015 - 22. Januar 2015