

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 9. Übungsblatt

Aufgabe 34:

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) := (3x^2 + x + y - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zeichnen Sie den Graphen von f über dem Quadrat $[-2, 2]^2$.

Aufgabe 35:

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x^2 - y^2 + z^2 - (x^2 + 2y^2 + 4z^2)^2.$$

Es stellt sich heraus, dass alle interessanten Punkte in der Ebene $\{y = 0\}$ liegen.

Zeichnen Sie den Graph von f über dem Rechteck $[-1, 1] \times [-1/2, 1/2]$ in der $(x, 0, z)$ -Ebene.

Die folgenden Optionen sind dabei nützlich: `style=patchcontour, contours=35, view = -0.3 .. 0.3, numpoints=3000`. Auf diesem Bild sieht man zwei der drei Sattelpunkte sehr gut. Warum sieht man den dritten nicht? Erstellen Sie ein ähnliches Bild, welches den dritten Sattelpunkt zeigt.

Aufgabe 36:

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) := 4x^2 - 3xy$$

auf dem Einheitskreis durch Lösen der zugehörigen Extremwertaufgabe unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 37:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := -(x^3 + 3x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

- Plotten Sie die Graphen von f, f' und f'' über dem Intervall $[-2, 6]$ in festgelegten Farben.
- Berechnen Sie $\max\{f(x) : x \in [-1, 2]\}$ sowie $\min\{f(x) : x \in [-1, 2]\}$.
- Bestimmen Sie alle relativen Extremalstellen von f und stellen Sie fest, welche von ihnen Maximal- bzw. Minimalstellen sind.
- Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0, f(0))$ und plotten sie den Graphen und die Tangente in eine Graphik. Bestimmen Sie ferner (gegebenenfalls) numerisch die verschiedenen Schnittpunkte der Tangente mit dem Graphen.

Aufgabe 38:

Die Tschebyscheffpolynome T_k werden für $k = 0, 1, \dots$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$$

definiert.

- (a) Berechnen und zeichnen sie T_k für $k = 0, \dots, 6$.
- (b) Bestimmen sie die Nullstellen von T_1, \dots, T_6 .

Aufgabe 39:

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y, z) \mapsto \exp(xy) \arctan(yz)$.

- (a) Berechnen sie alle zweiten Ableitungen von f
- (b) Berechnen sie den Gradienten und die Richtungsableitung in Richtung $(1, 1, 1)$.
- (c) Werten Sie die Richtungsableitung in Richtung $(1, 1, 1)$ in den Punkten $(0, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$ aus.