MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ACHIM WINKELHAUS

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

05.12.2013

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 7. Übungsblatt

Aufgabe 25:

Sei $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ die Sphäre (Oberfläche der Einheitskugel) im $\mathbb{R}^3$ und

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen sie für die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto f(x) := Ax \quad (x = (x_1, x_2, x_3)^T)$ das Bild von S unter der Abbildung f.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren. Für jeden Eigenwert λ und zugehörigen auf Länge 1 normierten Eigenvektor w zeichnen Sie jeweils den Vektor $\lambda \cdot w$ zusätzlich in das obige Bild hinein.

Aufgabe 26:

Sei $f(x) := \cos(x)/x$ und sei F eine Stammfunktion von f.
Wie lautet die Bezeichnung von F in Maple?

(a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von f und F bis zur Ordnung 12.

(b) Differenzieren Sie die Taylorentwicklung von F und vergleichen Sie sie mit der von f.

Aufgabe 27:

Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 4\}$ sei

$$f(x) := \frac{5x^3 - 3x - 2}{(2 + x)(3 - x)}$$

.

(a) Berechnen Sie die Taylorpolynome $P_1, \ldots, P_{15}$ von f entwickelt in Null.

(b) Zeichnen Sie die Graphen von $f, P_6, \ldots, P_{11}$ in ein Bild über den Intervallen $[-2, 3]$ und $[-1, 3/2]$ in festgelegten Farben.

(c) Berechnen Sie außerdem $|f(a) - P_j(a)|$ für $a \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$ und $j = 1, ..., 15$.

Aufgabe 28:

(a) Zeigen Sie, dass für $p = 2, 3, 4$ und 5 die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{p^n}$ konvergiert und berechnen sie den Grenzwert.

(b) Für welche a_n konvergiert das unendliche Produkt $\Pi_{n=2}^{\infty} a_n$ falls a_n gegeben ist durch

$$\frac{2n+1)^2}{2n+1)^2+1}, \quad (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad (-1)^n\left(1 - \frac{n}{n-1}\right)$$

Besprechung in den Übungen vom 10.-12. Dezember.