

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 13. Übungsblatt

**Aufgabe 53:**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben

$$y' + y \cdot \sin(x) + \sin(2x) = 0, \quad y(0) = 2, 1, 0.$$

Plotten Sie die Lösungen und das zugehörige Richtungsfeld in einer Zeichnung über  $[-\pi, 2\pi] \times [4, 11]$ .

**Aufgabe 54:**

Betrachten Sie die Besselsche Differentialgleichung ( für  $n = \frac{1}{2}$  )

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) \cdot y = 0$$

- (a) Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen dieser Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie nun die Lösungen der jeweiligen Anfangswertaufgabe  $y(\pi) = 0, y'(\pi) = 1$  bzw.  $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$ .
- (c) Betrachten Sie die Lösungen in einem Plot über dem Intervall  $[0, 20]$  bei geeigneter Beschränkung des Wertebereichs.

**Aufgabe 55:**

Ein einfaches Räuber-Beute-Modell wird gegeben durch

$$y' = ay - byz, \tag{1}$$

$$z' = -cz + dyz. \tag{2}$$

Dabei stellt man sich  $y$  als die Zahl der Beutetiere (Hasen) und  $z$  als die Zahl der Beutegreifer (sagen wir der Einfachheit halber Füchse) vor, beide als Funktionen der Zeit  $t$ .  $a, b, c$  und  $d$  seien positiv. Die Gleichungen sind so eingerichtet, dass sich die Hasen ohne Füchse beliebig vermehren, während die Füchse ohne Hasen aussterben.

- (a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem für

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{1}{500}, \quad c = \frac{1}{10}, \quad d = \frac{1}{100000}$$

und die Anfangsbedingung  $y(0) = 6000, z(0) = 30$  numerisch. Zeichnen Sie  $y$  und  $100z$  in einem Bild über einem ausreichend langen Zeitintervall. Zeichnen Sie die ebene Kurve  $\{(y(t), z(t)) \mid 0 \leq t \leq T\}$  für einen ausreichend großen Wert von  $T$ .

- (b) Bestimmen Sie die konstanten Lösungen des Systems aus den Differentialgleichungen (1) und (2), also diejenigen Anfangsbedingungen, deren Lösung konstant ist.

b.w.

### Aufgabe 56:

Fortsetzung zu Aufgabe 55

- (a) Wir ändern die erste der beiden Differentialgleichungen aus Aufgabe 55 wie folgt ab:

$$y' = ay - ky^2 - byz \quad (3)$$

und lassen die zweite unverändert. Zeigen Sie, dass nun die Zahl der Hasen nicht mehr unbeschränkt wächst, wenn es keine Füchse gibt.

*Hinweis:* Diesen Aufgabenteil lösen Sie bitte symbolisch.

- (b) Lösen Sie nun für  $k = 1/100000$  und  $k = 1/1000000$  die Anfangswertaufgabe von oben für das Differentialgleichungssystem aus Gleichung (2) und (3) numerisch. Stellen Sie dieselben Zeichnungen wie in Aufgabe 55 (a) her, aber mit entsprechend längeren Zeitintervallen.
- (c) Bestimmen Sie die konstanten Lösungen des neuen Systems in Abhängigkeit von  $k$ . Für welche  $k$  ist das Modell offensichtlich sinnlos?

### Aufgabe 57:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung (Airy Gleichung)

$$y''(x) - x \cdot y(x) = 0$$

Was ist das Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung?

Zeichnen Sie den Graphen der beiden Elemente des Fundamentalsystems über dem Intervall  $[-15, 5]$  und beschränken Sie den Wertebereich geeignet.