MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ACHIM WINKELHAUS

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

23.01.2014

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 12. Übungsblatt

Aufgabe 48:

Lösen Sie die implizite Anfangswertaufgabe

$$(x^2y + y^3)y' + x^3 + xy^2 = 0, \quad y(1) = y_0$$

für $y_0 = 1$ und $y_0 = 0$. Zeichnen Sie sämtliche Lösungen der Anfangswertaufgabe mit $y_0 = 0$ in einem Plot. Bestimmen Sie dazu zuerst den Definitionsbereich dieser Lösungen.
Sind die Lösungen der Anfangswertaufgabe mit $y(1) = 0$ im Punkt 1 differenzierbar?

Aufgabe 49:

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x} - x^2 - x^3 + x^4 = 0.$$

Lösen Sie die Anfangswertaufgaben $y(1) = 1, 0, -1$.
Zeichnen Sie alle drei Lösungen über dem Intervall $[-1.5, 2.5]$. Warum ist das, was Sie sehen, kein Widerspruch zur Theorie?

Aufgabe 50:

Versuchen Sie, die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{xy}, \quad y(1) = 4,$$

mit Maple zu lösen. Diese Differentialgleichung ist eine Bernoullische Differentialgleichung, d. h. von der Form

$$y' + a(x)y + b(x)y^s = 0$$

für ein $s \neq 1$. Die positiven Lösungen einer solchen Bernoullischen Differentialgleichung haben die Form $f^{1/(1-s)}$, wobei f eine Lösung der assoziierten Differentialgleichung

$$w' + (1-s)a(x)w + (1-s)b(x) = 0$$

ist.
Lösen Sie die korrespondierende Anfangswertaufgabe für die assoziierte Differentialgleichung. Überprüfen Sie, dass Sie auf diese Weise tatsächlich eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung gefunden haben.

Aufgabe 51:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine hinreichend glatte Abbildung.

Zeigen Sie mit Maple, dass durch

$$y(x) = \mathrm{e}^{xA} y_0 + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-s)A} f(s, y(s))\, ds$$

eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

definiert wird.

Aufgabe 52:

Berechnen Sie $\exp(xA)$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösen Sie damit die die homogene Differentialgleichung

$$y' = Ay, \quad y(0) = (1, 1, 1, 1)^T$$

und die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = Ay + (\sin(x), 0, x, 0)^T, \quad y(0) = (1, 1, 1, 1)^T .$$

Besprechung in den Übungen vom 28.-30. Januar 2014.