Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Felix Lieder
Dr. Thomas Davi

12.11.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik II – 10. Übungsblatt

Aufgabe 37:

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix vom Rang m. Zeigen Sie, dass Matrizen $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existieren, so dass $A = XY^T$ gilt.

(b) Es seien A und $I + Y^T A^{-1} X$ regulär. Beweisen Sie die *Sherman–Morrison–Woodbury–Formel*

$$(A + XY^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}X(I + Y^T A^{-1} X)^{-1} Y^T A^{-1}.$$

(c) Es seien $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n \geq m$ sowie eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Matrix $A + XY^T$ genau dann regulär ist, wenn $I + Y^T A^{-1} X$ regulär ist.

Aufgabe 38: Zeigen Sie: Falls $0 < c_2 < c_1 < 1$ gilt, kann es sein, dass für eine Abstiegsrichtung $s^n \in \mathbb{R}$ von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es keine Schrittlänge $\alpha > 0$ gibt, die die Wolfebedingung

$$\begin{aligned} f(x + \alpha s) &\leq f(x) + c_1 \alpha \nabla f(x)^T s \\ \nabla f(x + \alpha s)^T s &\geq c_2 \nabla f(x)^T s \end{aligned}$$

erfüllt.

Aufgabe 39: Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Führen Sie das Verfahren der konjugierten Gradienten zur Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS) $Ax = b$ bis zur Konvergenz durch und geben Sie die Lösung des LGS an.

Aufgabe 40: Implementieren Sie das CG-Verfahren zur Minimierung nichtquadratischer Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Algorithmus 2.11 mit Fletcher-Reeves aus der Vorlesung) mit einer Armino-Liniensuche in MATLAB. Verwenden Sie

```
function [x,iter] = con_grad(f, g, x0, epsilon)
```

als erste Zeile. Dabei bezeichnet `f` den Handle auf die Funktion, `g` den Handle auf deren Gradienten, `x0` den Startpunkt und `epsilon` den Parameter für das Abbruchkriterium. Zurückgegeben werden soll die Lösung `x` und die Anzahl der ausgeführten Iterationen `iter`.

Lösen Sie hiermit die folgenden Aufgaben:

(a) Minimiere die Funktion $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ (Himmelblau-Funktion) mit `epsilon`$=10^{-1}$ und `x0` $= (-0.27, -0.91)^T$, `x0` $= (-0.271, -0.91)^T$, `x0` $= (-0.25, -1.1)^T$ und `x0` $= (-0.25, -1)^T$.

(b) Minimiere die Funktion $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 105(x_2 - x_1^2)^2$ (Rosenbrock-Funktion) mit `x0`$=(0.5, -1)^T$ und `epsilon`$=10^{-2}$

Schicken Sie die erzeugten Dateien bis zum 19. Dezember 2012 11.00 Uhr an die Email-Adresse `pa@am.uni-duesseldorf.de`.

Abgabe am Mittwoch, 19. Dezember 2012 in der Vorlesung