Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

27. November 2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Einführung in die Optimierung – 8. Übungsblatt

Aufgabe 28:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Seien ferner

$$\mathcal{F} := \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A^T y + s = c, x \geq 0, s \geq 0\}$$

die (primal-dual) zulässige Menge und

$$\mathcal{F}^\circ := \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A^T y + s = c, x > 0, s > 0\}$$

die (primal-dual) strikt zulässige Menge. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{F}^\circ \neq \emptyset$, so ist die Menge

$$\mathcal{M}(\alpha) := \{(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x^T s \leq \alpha \text{ und es gibt ein } y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } (x, y, s) \in \mathcal{F}\}$$

für alle $\alpha \geq 0$ beschränkt.

Bemerkung: Wie kann man für ein $(x, s) \in \mathcal{M}(\alpha)$ den Ausdruck $x^T s$ und für ein $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{F}^\circ$ den Ausdruck $\bar{x}^T \bar{s}$ umformulieren?

Aufgabe 29:

Seien $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Es gelte weiterhin $\mathcal{F}^\circ \neq \emptyset$. Betrachten Sie das primal-duale Paar

$$(P) \qquad \min_{x \in P} c^T x \quad \text{mit } \mathcal{P} := \{x \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

$$(D) \qquad \max_{y \in D} b^T y \quad \text{mit } \mathcal{D} := \{y \mid A^T y \leq c\}.$$

und die Funktion $\Phi_\tau : \mathcal{D}^\circ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi_\tau(y) := -\frac{b^T y}{\tau} - \sum_{i=1}^{n} \ln(c_i - a_i^T y).$$

Zeigen Sie: Ist $y(\tau)$ Minimalstelle von Φ_τ, dann existieren $x(\tau)$ und $s(\tau)$, so dass $(x(\tau), y(\tau), s(\tau))$ die zentralen Pfad-Bedingungen erfüllt.

Bemerkung: Überlegen Sie sich, welcher Bedingung $y(\tau)$ als Minimum der Funktion Φ_τ genügt, und welche Bedingungen $x(\tau), s(\tau)$ als Lösungskomponenten der zentralen Pfad-Bedingungen erfüllen müssen.

Aufgabe 30: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang(A)=m gegeben.

Sei weiterhin $(\Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{s})$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

wobei $X = \mathrm{diag}(x) \succ 0$ und $S = \mathrm{diag}(s) \succ 0$ gelte.

Zeigen Sie, dass $\Delta\bar{y} = (AS^{-1}XA^T)^{-1}(v - AS^{-1}w + AS^{-1}Xu)$ gilt.

Aufgabe 31:

Implementieren Sie das *Prädiktor-Korrektor-Verfahren* von *Mehrotra* (siehe unten) mit den Parametern

$$\eta := 0.9995 \quad \text{und} \quad \varepsilon := 10^{-8}.$$

Schreiben Sie weiterhin ein Skript, in dem Sie mit dem obigen Verfahren das folgende Testproblem lösen:

$$\min_{x \in P} c^T x \quad \text{mit } \mathcal{P} := \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

und den Daten $c := (5, 3, 3, 6, 0, 0, 0)^T$,

$$A := \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 14 \\ -25 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Abgabe der Programmierübung:

Schicken Sie den Matlab-Code zu jedem Skript und jeder Funktion, die Sie zur Lösung von Aufgabe 31 verwenden, bis zum 4. Dezember 2012, 8:30 Uhr, an `pa@opt.uni-duesseldorf.de`
Im Betreff der E-Mail müssen ihr Name und ihre Matrikelnummer stehen.

Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Mehrotra

(S0) Wähle $(x^0, y^0, s^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ mit $x^0 > 0$, $s^0 > 0$, wähle $\eta \in (0,1)$ mit $\eta \approx 1$, und setze $k := 0$.

(S1) Falls

$$\frac{\|Ax^k - b\|}{\max\{1, \|b\|\}} + \frac{\|A^T y^k + s^k - c\|}{\max\{1, \|c\|\}} + \frac{|c^T x^k - b^T y^k|}{\max\{1, |c^T x^k|, |b^T y^k|\}} \le \varepsilon$$

erfüllt ist: STOP.

(S2) (Prädiktor-Schritt)
Berechne $(\Delta x^{k,P}, \Delta y^{k,P}, \Delta s^{k,P})$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^P \\ \Delta y^P \\ \Delta s^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - A^T y^k - s^k \\ b - Ax^k \\ -X_k S_k e \end{pmatrix}.$$

Setze

$$\begin{aligned}
t_{k,P}^{prim} &:= \min\{1, \min_{i:\Delta x_i^{k,P}<0} \frac{-x_i^k}{\Delta x_i^{k,P}}\}, \\
t_{k,P}^{dual} &:= \min\{1, \min_{i:\Delta s_i^{k,P}<0} \frac{-s_i^k}{\Delta s_i^{k,P}}\}, \\
\mu_k &:= \frac{(x^k)^T s^k}{n}, \\
\mu_{k,P} &:= \frac{(x^k + t_{k,P}^{prim} \Delta x^{k,P})^T (s^k + t_{k,P}^{dual} \Delta s^{k,P})}{n}, \\
\sigma_k &:= (\mu_{k,P}/\mu_k)^3.
\end{aligned}$$

(S3) (Korrektor-Schritt)
Berechne $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta s^k)$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - A^T y^k - s^k \\ b - Ax^k \\ -X_k S_k e - \Delta X_{k,P} \Delta S_{k,P} e + \sigma_k \mu_k e \end{pmatrix}.$$

Setze

$$\begin{aligned}
t_{k,max}^{prim} &:= \min\{1, \min_{i:\Delta x_i^k<0} \frac{-x_i^k}{\Delta x_i^k}\}, \\
t_{k,max}^{dual} &:= \min\{1, \min_{i:\Delta s_i^k<0} \frac{-s_i^k}{\Delta s_i^k}\}
\end{aligned}$$

und wähle

$$\begin{aligned}
t_k^{prim} &:= \min\{1, \eta t_{k,max}^{prim}\}, \\
t_k^{dual} &:= \min\{1, \eta t_{k,max}^{dual}\}
\end{aligned}$$

als primale und duale Schrittweite.

(S4) Setze

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &:= x^k + t_k^{prim} \Delta x^k, \\
y^{k+1} &:= y^k + t_k^{dual} \Delta y^k, \\
s^{k+1} &:= s^k + t_k^{dual} \Delta s^k,
\end{aligned}$$

$k \leftarrow k+1$, und gehe zu **(S1)**.

Abgabe am Dienstag, den 4. Dezember, in der Vorlesung