Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

20. November 2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Einführung in die Optimierung – 6. Übungsblatt

Aufgabe 24:

Sei ein lineares Programm in Standardform gegeben:

$$(P) \qquad \min_{x\in\mathcal{P}} c^T x \quad \text{mit } \mathcal{P} := \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Es gelte $\mathcal{P} \neq \emptyset$ und $\alpha := \inf_{x\in\mathcal{P}} c^T x > -\infty$.

Zeigen Sie: Das Programm (P) besitzt eine Optimallösung.

Hinweis: Betrachten Sie in einem Widerspruchsbeweis das System

$$\begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix}, \ x \geq 0$$

und verwenden Sie das Lemma von Farkas.

Aufgabe 25:

Betrachten Sie die zu den Daten $(A, b, c) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gehörigen linearen Programme

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rl} \max & b^T y \\ & A^T y \leq c \\ & y \gtrless 0. \end{array}$$

und die entsprechenden Optimalitätsbedingungen

$$(*) \begin{cases} A^T y + s &= c, \\ Ax &= b, \\ x_i s_i &= 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n, \\ x, s &\geq 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge von $(*)$ konvex ist.

Aufgabe 26:

Betrachten Sie das lineare Programm

$$(LP) \quad \begin{array}{rl} \min & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

a) Geben Sie die Optimallösung(en) des Programms (LP) an.

b) Formulieren Sie (LP) als lineares Programm in Standardform.

c) Bestimmen Sie für $\tau > 0$ die Lösung (x^τ, y^τ, s^τ) der zu der Formulierung aus b) gehörenden zentralen Pfadbedingungen.

d) Was gilt für $\lim_{\tau\to 0}(x^\tau, y^\tau, s^\tau)$?

Abgabe am Dienstag, den 27. November, in der Vorlesung