Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

13. November 2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Einführung in die Optimierung – 5. Übungsblatt

Aufgabe 20:

Beweisen Sie den *Satz von Tucker*: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix, d.h. $A^T = -A$, so gibt es einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \geq 0$, so dass $Aw \geq 0$ und $Aw + w > 0$.

Hinweis: Sie dürfen das Lemma von Farkas verwenden.

Aufgabe 21:

Sei $S \neq \emptyset$ eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, der nicht in S liegt. Zeigen Sie, dass genau ein $z \in S$ existiert, so dass $\min_{x\in S} \|x - y\|_2 = \|z - y\|_2$.

Aufgabe 22:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ sowie $c, d \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben. Betrachten Sie das Problem

$$(1) \qquad \min_{x\in P} \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \quad \text{mit } P := \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Zur Lösung von (1) wird das lineare Programm

$$(2) \qquad \min_{(y,t)\in \tilde{P}} c^T y + \alpha t \quad \text{mit } \tilde{P} := \{(y,t) \mid Ay = bt, d^T y + \beta t = 1 \text{ und } y \geq 0,\ t \geq 0\}$$

verwendet. Im Folgenden sei die Menge der Optimallösungen von (1) nicht leer. Es gelte außerdem $d^T x + \beta > 0$ für alle $x \in P$. Zeigen Sie:

a) Das Problem (2) besitzt eine Optimallösung.

b) Ist die Menge der Optimallösungen von (1) beschränkt, dann gilt für jede Optimallösung $(\bar{y}, \bar{t})$ von (2): $\bar{t} > 0$ und $\bar{y}/\bar{t}$ ist Optimallösung von (1).

Aufgabe 23:

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = -A^T$, und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $c := -b$. Zeigen Sie:

a) Das zu

$$(*) \qquad \min_{x\in P} c^T x \quad \text{mit } P := \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

gehörige duale Programm ist äquivalent zu $(*)$.

b) Falls $(*)$ eine Optimallösung besitzt, so ist Null der Optimalwert.

Abgabe am Dienstag, den 20. November, in der Vorlesung