Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

23. Oktober 2012

Einführung in die Optimierung – 2. Übungsblatt

Aufgabe 8:

Sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang}(A) = m$ gegeben. Beweisen Sie: Ist x eine nichtdegnerierte Basislösung von $Ay = b, y \geq 0$, dann ist die zu x gehörende Basis B eindeutig bestimmt. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 9:

Für eine gesunde Ernährung sollten Sie mindestens 190 μg Vitamin A aber auch nicht mehr als 500 μg Vitamin A, mindestens 140 μg Vitamin C und mindestens 60 mg Eisen zu sich nehmen. Da Sie außerdem hart arbeiten, brauchen Sie auch mindestens 3000 kcal. Mindestens die Hälfte davon (also mind. 1500 kcal) soll in Form von Kohlenhydraten aufgenommen werden. (1 g Kohlenhydrate entspricht 5 kcal)

Hier sind ein paar Angaben zu Vitaminen, Mineralstoffen, kcal, Kohlenhydraten und zum Preis einer Portion der zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel.

	Eisen (mg)	Vitamin A (μg)	Vitamin C (μg)	Energie (kcal)	Kohlenhydrate (g)	Preis
Bananen	6	30	30	100	15	3
Orangen	15	20	10	50	6	6
Pizza	2	2	1	1000	80	9
Kekse	1	1	2	600	70	10

(a) Stellen Sie eine möglichst günstige Obstdiät (nur Bananen und Orangen) zusammen, die den Bedarf an Vitaminen und Mineralstoffen (Eisen) deckt, und ermitteln Sie mit dem grafischen Lösungsverfahren die Optimallösung.

(b) Formulieren Sie ein lineares Programm für eine möglichst günstige Diät aus allen vier Nahrungsmitteln, die neben dem Bedarf an Vitaminen und Mineralstoffen auch die Forderungen an den Energiebedarf erfüllt. Geben Sie dieses lineare Programm in Standardform und in kanonischer Form an.

Auf dem NEOS Server http://www.neos-guide.org finden Sie unter dem Punkt “Case Studies/Iterative Case Studies” mehr zum “Diet Problem” und ein java applet “Simplex Method Tool” mit dem Sie kleine lineare Programme lösen können.

b.w.

Aufgabe 10:

Als Polytop im $\mathbb{R}^3$, sei die Pyramide mit den Eckpunkten

$$(1,1,1),\ (2,2,0),\ (0,0,0),\ (0,2,0),\ (2,0,0)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die "Spitze", d.h. der Punkt $(1,1,1)$, entartet ist.

Aufgabe 11:

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion $[\mathtt{x}_{\mathtt{neu}}, \mathtt{B}_{\mathtt{neu}}] = \mathtt{simplexschr}(\mathtt{x}, \mathtt{B}, \mathtt{A}, \mathtt{b}, \mathtt{c})$, welche zu einem linearen Programm der Form

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathtt{c}^T x \\ & \mathtt{A}x = \mathtt{b} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

und einem Paar $(\mathtt{x}, \mathtt{B})$ (zulässige Basislösung $\mathtt{x}$ samt Basis $\mathtt{B}$) einen Simplex Schritt (Phase II) berechnet und die ermittelte „bessere“ Basis $\mathtt{B}_{\mathtt{neu}}$ sowie die zugehörige Basislösung $\mathtt{x}_{\mathtt{neu}}$ ausgibt.

Schreiben Sie weiterhin ein Matlab-Skript, in dem Sie als Erstes die Daten `A,b,c` zum folgenden Programm erzeugen:

$$\begin{array}{lrrrrrrrl} \min & -\frac{4}{5}x_1 & +18x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & \\ & \frac{16}{5}x_1 & -84x_2 & -12x_3 & +8x_4 & +x_5 & & & = 0 \\ & \frac{1}{5}x_1 & -5x_2 & -\frac{2}{3}x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & & +x_6 & & = 0 \\ & x_1 & & & & & & +x_7 & = 1 \\ & & & & & & & x & \geq 0 \end{array}$$

Rufen Sie anschließend die Funktion `simplexschr` auf, um ausgehend von der Basis $\mathtt{B} = (5,6,7)$ und der entsprechenden Basislösung $\mathtt{x}$ eine bessere Basis $\mathtt{B}_{\mathtt{neu}}$ und $\mathtt{x}_{\mathtt{neu}}$ zu bestimmen.

(Führen Sie ausgehend von der Basis $(5,6,7)$ insgesamt 6 Simplex Schritte aus und vergleichen Sie die Basen. Was fällt ihnen auf?)

Abgabe der Programmierübung:

Schicken Sie den Matlab-Code zu jedem Skript und jeder Funktion, die Sie zur Lösung von Aufgabe 11 verwenden, bis zum 30. Oktober 2012, 8:30 Uhr, an `pa@opt.uni-duesseldorf.de`
Im Betreff der E-Mail müssen ihr Name und ihre Matrikelnummer stehen.

Bemerkungen:

- Die Übungsblätter dürfen auch in Gruppen von zwei Personen abgegeben werden. Allerdings sollte jeder, der seinen Namen auf ein Übungsblatt setzt, die Aufgaben auch vorrechnen können.

Abgabe am Dienstag, den 30. Oktober, in der Vorlesung