Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

22. Januar 2013

| 46 | 47 | PK4 | PK5 | PK6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Name: ________________
Vorname: ________________
MNr: ________________

# Einführung in die Optimierung – 14. Übungsblatt

## Aufgabe 46:

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{conv} M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists r \in \mathbb{N}\ \exists x_i \in M\ \exists \lambda_i \geq 0 : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,\ x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\}$$

gilt.

## Aufgabe 47:

Betrachten Sie das folgende ganzzahlige Problem:

$$(IP) \quad \begin{array}{lrl} \min & x_1 - 3x_2 & \\ \text{s.d.} & 2x_1 + 2x_2 & \leq 7 \\ & -2x_1 + 2x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Geben Sie zunächst die LP-Relaxation von $(IP)$ an und bestimmen Sie anschließend das zugehörige lineare Programm in Standardform. Führen Sie danach einen *Gomory-Schnitt* aus. Die hierbei auftretenden linearen Programme dürfen Sie grafisch lösen.

## [Probeklausur Teil 2]

Die folgenden Aufgaben sollen als (zusätzliche) Klausurvorbereitung dienen. Sie werden wie normale Übungsaufgaben gewertet.

## Probeklausur Aufgabe 4:

Sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Beschreiben Sie das *Verfahren des goldenen Schnittes* zur Minimierung von $f$ im Pseudocode.

**Hinweis:** Es gilt $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $1 - \tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

**Probeklausur Aufgabe 5:**

Betrachten Sie die zu den Daten $(A, b, c) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gehörigen linearen Programme

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rl} \max & b^T y \\ & A^T y + s = c \\ & s \geq 0. \end{array}$$

und die entsprechenden Optimalitätsbedingungen

$$(S_\tau) \left\{ \begin{array}{rcll} A^T y + s & = & c, & \\ Ax & = & b, & \\ x_i s_i & = & \tau & \forall i = 1, \ldots, n, \\ x, s & > & 0 & \end{array} \right.$$

für $\tau > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Lösbarkeit der Programme $(P)$ und $(D)$ nicht zwingend die Lösbarkeit des Systems $(S_\tau)$ impliziert.

(b) Sei

$$F_\tau : \mathbb{R}^{n+m+n} \to \mathbb{R}^{n+m+n}, \ F_\tau(\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ x_1 s_1 - \tau \\ \vdots \\ x_n s_n - \tau \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(S_\tau)$ äquivalent zu dem System

$$F_\tau(\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix}) = 0, \ x > 0, \ s > 0.$$

Zeigen Sie: Gilt $\mathrm{Rang}(A) = m$, dann ist die Jacobimatrix

$$J_{F_\tau}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix}) \text{ für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} \text{ mit } x > 0, \ s > 0 \text{ invertierbar.}$$

**Probeklausur Aufgabe 6:**

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $(x_k)_{k\geq 0}$ eine Folge, die für gewisse Suchrichtungen $d^k$ und Schrittweiten $t_k > 0$ der Formel

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k \ \forall k \geq 0$$

genügt. Ferner gelte

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \varepsilon_k \ \forall k \geq 0,$$

wobei $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen sei, welche die Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$$

erfüllt.

Sei $x^*$ der Grenzwert einer Teilfolge $(x_{k_s})_{s\geq 0}$ der Folge $(x_k)_{k\geq 0}$, wobei $d^{k_s} = -\nabla f(x^{k_s})$ für alle $s \geq 0$ gelte und die Schrittweite $t_{k_s}$ den Bedingungen

$$f(x^{k_s} + t_{k_s} d^{k_s}) \leq f(x^{k_s}) + \sigma t_{k_s} \nabla f(x^{k_s})^T d^{k_s}$$

und $t_{k_s} \geq \theta$ für alle $s \geq 0$ genüge. Hierbei seien $\theta > 0$ und $\sigma \in (0, 1)$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen erfüllt sind:

(a) Die gesamte Folge $(f(x^k))_{k\geq 0}$ konvergiert gegen $f(x^*)$.

**Hinweis:** Untersuchen Sie für $\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k$ die Folge $\left(f(x^k) + \varepsilon - \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j\right)_{k\geq 0}$.

(b) $x^*$ ist ein stationärer Punkt von $f$.



**Abgabe am Dienstag, den 29. Januar, in der Vorlesung**