Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

8. Januar 2013

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

| 40 | 41 | 42 | 43 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Name: ______________
Vorname: ______________
MNr: ______________

# Einführung in die Optimierung – 12. Übungsblatt

## Aufgabe 40:

Für $s, y \in \mathbb{R}^n$ mit $s^T y > 0$ und eine symmetrische und positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lautet die sogenannte *direkte BFGS-Aufdatierungsformel*

$$B_+^{BFGS} = B + \frac{1}{s^T y} y y^T - \frac{1}{s^T B s} B s s^T B.$$

Zeigen Sie, dass $B = H^{-1}$ die Gleichung $B_+^{BFGS} = (H_+^{BFGS})^{-1}$ impliziert, wobei $H_+^{BFGS}$ die durch die inverse BFGS-Aufdatierungsformel definierte Matrix $H_+^{BFGS} := (I - \rho s y^T) H (I - \rho y s^T) + \rho s s^T$ für $\rho = \frac{1}{y^T s}$ ist.

**Hinweis:** Verwenden Sie die *Sherman-Morrison-Woodbury-Formel*.

## Aufgabe 41:

Zeigen Sie: $\log(t) \leq t - 1$ für alle $t \in (0, \infty)$.

## Aufgabe 42:

Sei eine symmetrische und positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben.

Zeigen Sie: $\mathrm{Spur}(B) > \log(\det(B))$.

## Aufgabe 43: [Dies ist die letzte Programmieraufgabe :-) ]

Erstellen Sie die Funktion `[x,iter]=bfgs`$(f, \nabla f, x_0, H_0, epsilon)$, in welcher das BFGS-Verfahren aus der Vorlesung genutzt wird, um die Funktion $f$ bei Start in $x_0$ zu minimieren. Die Funktionen $f$ und $\nabla f$ sollen mit Hilfe von Handles übergeben werden. $H_0$ ist die gewählte Startmatrix, auf welche die BFGS-Formel angewendet wird. Abbruchbedingung des Verfahrens soll $\|\nabla f(x_k)\| \leq epsilon$ sein. Die Schrittweite $\alpha_k$ in Iteration $k$ soll mit der Funktion $\alpha_k$=`wolfep`$(f, \nabla f, x_k, p_k)$ berechnet werden, wobei $x_k$ die aktuelle Iterierte und $p_k$ die Abstiegsrichtung ist. Hierbei soll die Funktion `wolfep` einer Implementierung von **Algorithmus 1** entsprechen (siehe unten). Setzen Sie $\sigma := 10^{-4}$, $\delta := 0.9$, $\gamma := 2$ und $t_0 := 1$.
Die Ausgabe der Funktion `bfgs` soll aus der ermittelten Lösung `x` und der Anzahl der benötigten Iterationsschritte `iter` bestehen.

Schreiben Sie weiterhin ein Skript, in welchem Sie die Funktion `bfgs` verwenden, um die Rosenbrock-Funktion aus Aufgabe 34(a) bei Start in $x_0 = (-1.2, 1)^T$ zu minimieren. Setzen Sie hierbei $H_0 := I_2$ und $epsilon := 10^{-6}$.

**Abgabe der Programmierübung:**

Schicken Sie den Matlab-Code zu jedem Skript und jeder Funktion, die Sie zur Lösung von Aufgabe 43 verwenden, bis zum 15. Januar 2013, 8:30 Uhr, an `pa@opt.uni-duesseldorf.de`
Im Betreff der E-Mail müssen ihr Name und ihre Matrikelnummer stehen.

b.w.

Setze

$$\phi(t) := f(x + td) \quad \text{und} \quad \psi(t) := \phi(t) - \phi(0) - \sigma t \phi'(0).$$

---

**Algorithmus 1** Realisierung der Wolfe-Powell-Regel

---

<u>Phase A:</u>

**(A0)** Wähle $t_0 > 0, \gamma > 1$ und setze $i := 0$.

**(A1)** Ist $\psi(t_i) \geq 0$, so setze $a := 0, b := t_i$ und gehe zu **(B0)**.
Ist $\psi(t_i) < 0$ und $\phi'(t_i) \geq \delta\phi'(0)$, so setze $t := t_i$ und breche ab: STOP 1.
Ist $\psi(t_i) < 0$ und $\phi'(t_i) < \delta\phi'(0)$, so setze $t_{i+1} := \gamma t_i, i \leftarrow i + 1$ und gehe zu **(A1)**.

<u>Phase B:</u>

**(B0)** Setze $j := 0$ und übernehme $a_0 := a, b_0 := b$ aus <u>Phase A</u>.

**(B1)** Setze $t_j := \frac{a_j + b_j}{2}$.

**(B2)** Ist $\psi(t_j) \geq 0$, so setze $a_{j+1} := a_j, b_{j+1} := t_j, j \leftarrow j + 1$ und gehe zu **(B1)**.
Ist $\psi(t_j) < 0$ und $\phi'(t_j) \geq \delta\phi'(0)$, so setze $t := t_j$ und breche ab: STOP2.
Ist $\psi(t_j) < 0$ und $\phi'(t_j) < \delta\phi'(0)$, so setze $a_{j+1} := t_j, b_{j+1} := b_j, j \leftarrow j + 1$ und gehe zu **(B1)**.

---

**Abgabe am Dienstag, den 15. Januar, in der Vorlesung**