Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

18. Dezember 2012

36	37	38	39	$\sum$

Name: ______________
Vorname: ______________
MNr: ______________

Einführung in die Optimierung – 11. Übungsblatt

Aufgabe 36:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\det(A) \neq 0$, dann ist auch A^{-1} symmetrisch.

(b) Ist A positiv definit, dann ist auch A^{-1} positiv definit.

(c) Ist A positiv semidefinit, dann existiert eine symmetrische Matrix B mit $B^2 = A$.

Aufgabe 37:

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix vom Rang m. Zeigen Sie, dass Matrizen $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existieren, so dass $A = XY^T$ gilt.

(b) Es seien A und $I + Y^T A^{-1} X$ regulär. Beweisen Sie die *Sherman–Morrison–Woodbury–Formel*

$$(A + XY^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}X(I + Y^T A^{-1} X)^{-1} Y^T A^{-1}.$$

(c) Es seien $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n \geq m$ sowie eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Matrix $A + XY^T$ genau dann regulär ist, wenn $I + Y^T A^{-1} X$ regulär ist.

Aufgabe 38:

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $g : K \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Es gebe eine Konstante $\gamma > 0$, so dass

$$\|Dg(x) - Dg(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in K.$$

Zeigen Sie: Für alle $x, y \in K$ gilt

$$\|g(x) - g(y) - Dg(y)(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2.$$

Hinweis: Sie dürfen die folgende Aussage ohne Beweis verwenden:

Sei eine Funktion $c : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ mit $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_m(t))^T$ gegeben. Sind $c_1, \ldots, c_m$ auf $[a, b]$ integrierbar, dann gilt

$$\left\| \int_a^b c(t)dt \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \int_a^b c_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b c_m(t)dt \end{pmatrix} \right\| \leq \int_a^b \|c(t)\| dt.$$

b.w.

Aufgabe 39:

Erstellen Sie die Funktion `[x,iter]`=`prcg`$(A, b, x_0, B, epsilon)$, in welcher ausgehend von x_0 das vorkonditionierte CG-Verfahren aus der Volresung verwendet wird, um die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ zu minimieren. Hierbei seien A eine symmetrische, positiv definite Matrix und b ein Vektor von geeigneter Dimension. Die Matrix B ist die gewählte Approximation an A^{-1}. Die Ausgabe soll aus der ermittelten Lösung `x` sowie der Anzahl der benötigten Iterationsschritte `iter` bestehen. Für die Lösung `x` soll $\|A\mathtt{x} - b\| \leq epsilon$ gelten.

Schreiben Sie weiterhin eine Funktion A=`jinmatrix`(n), in welcher abhängig von n die Matrix $A = (a_{ij})$ durch die folgende Vorschrift erzeugt wird:

Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i & \text{falls } i = j, \\ \frac{-1}{(i+j)^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schreiben Sie abschließend ein Skript, in dem Sie für $n = 64, 128, 256$ mit der Funktion `jinmatrix` die Matrix $A = (a_{ij})$ erstellen und anschließend $b = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ setzen. Verwenden Sie dann die Funktion `prcg`, um das Minimum von $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ mit einem Fehler von weniger als $10^{-6}(= epsilon)$ zu bestimmen. Starten Sie hierbei mit $x_0 = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ und wählen Sie

i) $B = I_n$ (CG-Verfahren ohne Vorkonditionierung)

ii) $B = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1})$ (Jacobi-Vorkonditionierer)

Vergleichen Sie die Anzahl der benötigten Iterationsschritte. Was fällt ihnen auf?

Abgabe am Dienstag, den 8. Januar 2013, in der Vorlesung